

II. kolo kategorie Z7

Z7-II-1

Karel narýsoval trojúhelník ADE . Na straně AD vyznačil body B a C tak, že platilo:

- bod C je středem strany AD ,
- trojúhelníky ABE a BCE mají stejný obsah,
- trojúhelník BDE je rovnoramenný se základnou BE ,
- obvod trojúhelníku ABE je o 6 cm větší než délka lomené čáry EBC ,
- obvod trojúhelníku ACE je o 2 cm větší než obvod trojúhelníku CDE ,

Vypočtete obvod trojúhelníku ADE .

(*E. Semerádová*)

Možné řešení. Trojúhelníky ABE a BCE mají stejný obsah a dohromady tvoří trojúhelník ACE . Tedy bod B je středem úsečky AC neboli úsečky AB a BC jsou shodné. Trojúhelník ABE a lomená čára EBC mají společnou stranu EB a přitom $|AB| = |BC|$. Zadaný rozdíl tedy odpovídá straně AE , tj. $|AE| = 6$ cm.

Bod C je středem úsečky AD , tedy úsečky AC a CD jsou shodné. Trojúhelníky ACE a CDE mají společnou stranu CE a přitom $|AC| = |CD|$. Rozdíl obvodů tedy odpovídá rozdílu délek stran AE a DE , tj. $|AE| = |DE| + 2$ cm neboli $|DE| = 6 - 2 = 4$ cm.

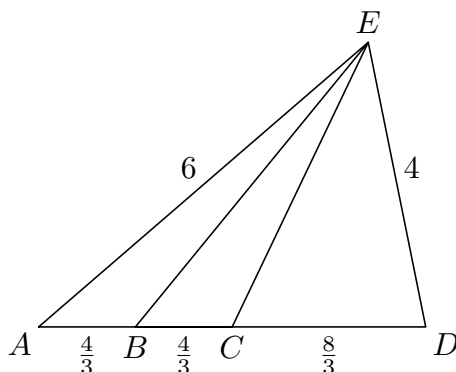
Trojúhelník BDE je rovnoramenný se základnou BE , tedy $|DB| = |DE| = 4$ cm. Úsečky AB a BC jsou shodné a stejně tak úsečky AC a CD jsou shodné, tedy $|AB| = \frac{1}{4}|AD|$ neboli $|BD| = \frac{3}{4}|AD|$. Odtud dostáváme $|AD| = \frac{4}{3}|BD| = \frac{16}{3}$ cm.

Obvod trojúhelníku ADE je roven

$$|AD| + |DE| + |EA| = \frac{16}{3} + 4 + 6 = \frac{46}{3} \doteq 15,33 \text{ (cm)}.$$

Hodnocení. 3 body za pomocné postřehy a dílčí výsledky; 3 body za dopočítání a kvalitní komentáře.

Poznámka. Útvar vypadá až na měřítko takto:



Z7-II-2

Jsem Ivan a jsem třikrát mladší než můj otec. Mám bratry Vincenta a Jakuba, kterým je 11 a 9 let. Můj věk je roven pětinasobku třetiny věku mladšího z bratrů. Zvláště naší rodiny je, že jsme se všichni narodili 12. dubna, takže dnes slavíme narozeniny.

Za kolik let bude věk našeho otce roven součtu věků nás tří bratrů? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Mladšímu z bratrů je 9 let, tedy mně je 15 let ($\frac{9}{3} \cdot 5 = 15$). Jsem třikrát mladší než můj otec, tedy otci je 45 let ($3 \cdot 15 = 45$). Součet věků nás tří bratrů je 35 let ($11 + 9 + 15 = 35$).

Věk otce je o 10 let větší než součet věků nás tří bratrů a tento rozdíl se každým rokem snižuje o 2 (otci přibude 1 rok, zatímco v našem součtu přibudou 3 roky). Věk otce bude stejný jako součet věků nás tří bratrů za 5 let ($10 : 2 = 5$).

Hodnocení. 3 body za dílčí výsledky; 3 body za dopočítání a kvalitu komentáře.

Poznámka. Úlohu lze řešit postupným připočítáváním roků k věku otce a součtu věků bratrů, dokud nebude rozdíl nulový. Symbolicky: za r roků bude otcův věk $45 + r$, zatímco součet věků bratrů bude $35 + 3r$. Požadovaná rovnost po úpravách dává

$$\begin{aligned}35 + 3r &= 45 + r, \\2r &= 10, \\r &= 5.\end{aligned}$$

Z7-II-3

Eva měla šest kartiček s číslicemi 1, 2, 3, 4, 5, 6 (na každé kartičce byla jedna číslice). Přeskupováním všech šesti kartiček tvořila skupiny čísel a sledovala jejich vlastnosti. Zjistila, že umí různými způsoby poskládat trojice čísel, z nichž každé je dělitelné šesti.

Určete všechny takové trojice čísel. (*E. Novotná*)

Možné řešení. Číslo je dělitelné šesti, právě když je sudé a součet jeho číslic je dělitelný třemi. Tři vytvořená čísla musí končit sudou číslicí, a ty jsou k dispozici právě tři:

$$2, \quad 4, \quad 6.$$

Jediná volnost v tvorbě čísel je tedy na předchozích místech.

Přidáním číslice 3 k jakémukoli číslu neovlivní jeho dělitelnost, příp. nedělitelnost třemi. Můžeme tedy přednostně uvažovat o doplnění zbylých číslic 1 a 5 tak, aby byla zajištěna dělitelnost třemi. To lze udělat jediné takto:

$$12, \quad 54, \quad 6.$$

Pokud po doplnění 3 vznikne trojmístné číslo, můžeme číslice na prvních dvou místech prohodit, aniž by se některá z kontrolovaných vlastností pokazila. Celkem tak dostáváme pět vyhovujících možností:

$$\begin{aligned}312, \quad 54, \quad 6, \\132, \quad 54, \quad 6, \\12, \quad 354, \quad 6, \\12, \quad 534, \quad 6, \\12, \quad 54, \quad 36.\end{aligned}$$

Hodnocení. 2 body za přípravné postřehy s dělitelností; 2 body za shrnutí a výčet možností; 2 body za kvalitu komentáře.