

II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

Paní učitelka dala dětem za úkol, aby číslo napsané na tabuli vynásobily třemi a k výsledku přičetly číslo sedm. Kamča úkol vyřešila správně. Její kamarádka Růža sice počítala správně, ale jiný příklad: dané číslo vynásobila sedmi a k výsledku přičetla číslo tři. Růžin výsledek byl o 84 větší než ten Kamčín.

Které číslo bylo napsáno na tabuli? (M. Petrová)

Možné řešení. Uvažme, co by stalo, kdyby kamarádky přičítaly stejná čísla ke svým různým mezivýsledkům. Tedy uvažme situaci, kdy by Růža k sedminásobku daného čísla místo 3 přičetla 7 jako Kamča (příp. situaci, kdy by Kamča k trojnásobku daného čísla místo 7 přičetla 3 jako Růža):

V takovém případě by se rozdíl výsledků kamarádek zvětšil o 4, tj. na $84 + 4 = 88$. Současně by tento rozdíl odpovídal čtyřnásobku čísla na tabuli (Růža násobila sedmi a Kamča třemi). Na tabuli bylo napsáno číslo 22, neboť $88 : 4 = 22$.

Hodnocení. 2 body za pomocné úvahy či úpravy; 2 body za výsledek; 2 body za kvalitu komentáře.

Poznámka. Pokud neznámé číslo na tabuli označíme n , potom Kamčín výsledek byl $3n + 7$, zatímco Růžin $7n + 3$. Předchozí myšlenky pak lze zapsat takto:

$$(7n + 3) - (3n + 7) = 84,$$

$$(7n + 7) - (3n + 7) = 88,$$

$$4n = 88,$$

$$n = 22.$$

Úlohu lze řešit také systematickým zkoušením možností a porovnáváním Kamčina a Růžina výsledku.

Z6–II–2

Myslím si tři přirozená čísla. Součin prvního a druhého je 24, součin druhého a třetího je 32, součin prvního a třetího je 48.

Která čísla si myslím? (E. Novotná)

Možné řešení. Součin 48 prvního a třetího čísla je dvojnásobkem součinu 24 prvního a druhého čísla. Tedy třetí číslo je dvojnásobkem druhého čísla.

Proto také součin 32 druhého a třetího čísla je dvojnásobkem součinu druhého čísla sama se sebou. Součin druhého čísla sama se sebou je $32 : 2 = 16$, tudíž druhé číslo musí být 4.

Třetí číslo je $2 \cdot 4 = 8$ a ze součinu 24 vyplývá, že první číslo je $24 : 4 = 6$. (Pro kontrolu můžeme ověřit, že součin prvního a třetího je $6 \cdot 8 = 48$.)

Myšlená čísla jsou 6, 4 a 8.

Jiné řešení. Součin prvního a druhého čísla je menší než součin druhého a třetího, tedy první číslo je menší než třetí. Součin druhého a třetího čísla je menší než součin

prvního a třetího, tedy druhé číslo je menší než první. Myšlená čísla jsou uspořádána takto:

$$\text{druhé} < \text{první} < \text{třetí}.$$

Číslo 24 lze vyjádřit jako součin dvou přirozených čísel následujícími způsoby:

$$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6.$$

Pro každou z těchto možností uvážíme menší součinitel jako druhé myšlené číslo a větší součinitel jako první myšlené číslo, ze součinu 32 zkusíme vyjádřit třetí myšlené číslo a ověříme, zda součin prvního a třetího vychází 48:

d	p	$t = 32 : d$	$p \cdot t = 48 ?$
1	24	32	$24 \cdot 32 > 48$
2	12	16	$12 \cdot 16 > 48$
3	8	$32 : 3$	není celé č.
4	6	8	$6 \cdot 8 = 48$

Jediná vyhovující možnost je na posledním řádku tabulky; myšlená čísla jsou 6, 4 a 8.

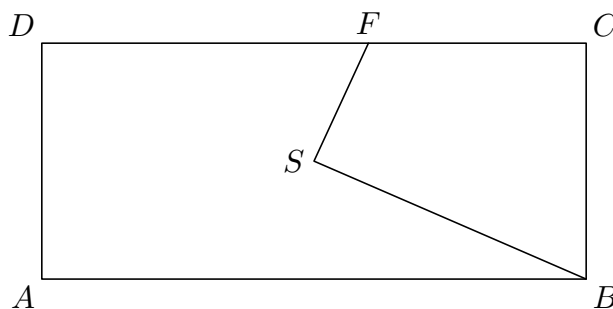
Hodnocení. 2 body za pomocné úvahy a postřehy; 2 body za výsledek; 2 body za kvalitu komentáře.

Z6-II-3

Obdélník $ABCD$ má stranu AB délky 12 cm a stranu BC délky 6 cm. Bod S je středem obdélníku a bod F leží na straně CD . Čtyřúhelník $BCFS$ má třetinový obsah vzhledem k obdélníku $ABCD$.

Určete velikost úsečky CF .

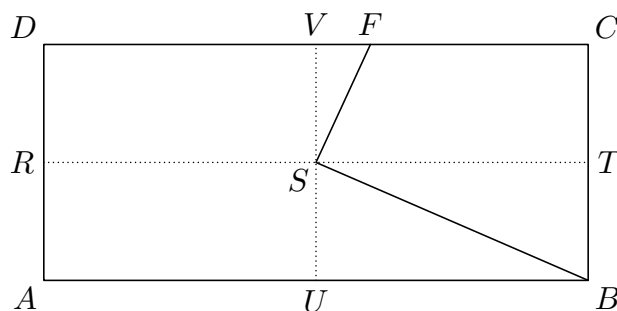
(E. Novotná)



Poznámka: obrázek je pouze ilustrační.

Možné řešení. Obsah obdélníku $ABCD$ je 72 cm^2 ($12 \cdot 6 = 72$), tedy čtyřúhelník $BCFS$ má obsah 24 cm^2 ($72 : 3 = 24$).

V následujících úvahách si pomůžeme dodatečným dělením určeným středy stran obdélníku $ABCD$:



Tečkovanými úsečkami je daný obdélník rozdělen na čtyři shodné obdélníky o rozměrech 6 cm a 3 cm. Obsah každého z těchto obdélníků je 18 cm^2 ($18 = 72 : 4 = 6 \cdot 3$). Čtyřúhelník $BCVS$ má obsah 27 cm^2 ($18 + \frac{1}{2} \cdot 18 = 27$). To je víc než 24 cm^2 , tedy bod F skutečně leží na úsečce VC (a nikoli na úsečce VD).

Aby měl čtyřúhelník $BCFS$ uvedený obsah, potřebujeme odečíst 3 cm^2 odpovídající trojúhelníku FVS . Tento trojúhelník je pravoúhlý a strana VS má velikost 3 cm, tedy strana VF musí mít velikost 2 cm ($\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$). Velikost úsečky CF je 4 cm ($6 - 2 = 4$).

Hodnocení. 2 body za obsah čtyřúhelníku $BCFS$ a další pomocné úvahy; 2 body za výsledek; 2 body za kvalitu komentáře.

Poznámka. Předchozí úvahy lze nahradit zkoušením možností v (dostatečně jemné) čtverečkové síti. Útvar vypadá až na měřítko takto:

