63. ročník Matematické olympiády

III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Hvězdičky na obrázku představují 16 bezprostředně po sobě jdoucích přirozených násobků čísla tři. Přitom čísla v rámečcích mají stejný součet. Určete nejmenší z těchto 16 čísel. (*L. Šimůnek*)

$$\boxed{* * * * * *}\ * * * * *\ \boxed{* * * * *}$$

Možné řešení. Porovnejme poslední, tedy největší čísla obou rámečků: největší číslo druhého rámečku leží o 10 míst vpravo od největšího čísla prvního rámečku, je tedy o 30 větší. Stejným porovnáním zjistíme, že druhá největší čísla v rámečcích se liší také o 30, stejně tak třetí největší, čtvrtá největší i pátá největší čísla. Součet všech pěti čísel druhého rámečku je tedy o $5 \cdot 30 = 150$ větší než součet pěti největších čísel prvního rámečku. Aby byly v rámečcích stejné součty, musí být zbývající číslo prvního rámečku právě 150. Nejmenší číslo této posloupnosti je tedy 150.

Jiné řešení. Nejprve hledejme 16 po sobě bezprostředně jdoucích přirozených čísel splňujících podmínku o shodných součtech. Pokud nalezená čísla vynásobíme třemi, vynásobí se třemi i součty v rámečcích a jejich rovnost tedy zůstane zachována. Tímto postupem dojdeme k žádanému výsledku a přitom si zjednodušíme výpočty, neboť budeme v úvodu pracovat s menšími čísly.

Nejmenší číslo v posloupnosti bezprostředně po sobě jdoucích přirozených čísel označíme x a vyjádříme součet čísel v prvním rámečku:

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5 = 6x + 15.$$

První číslo v druhém rámečku je při daném značení rovno $x + 11$. Vyjádříme součet čísel v druhém rámečku:

$$x + 11 + x + 12 + x + 13 + x + 14 + x + 15 = 5x + 65.$$

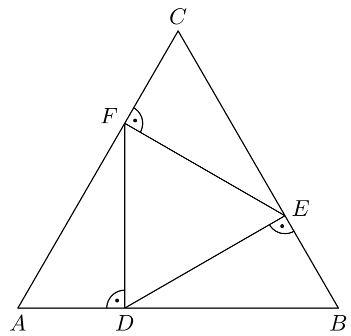
Řešením rovnice $6x + 15 = 5x + 65$ dostaneme $x = 50$. Vynásobením třemi dostaneme první číslo posloupnosti násobků tří, tímto číslem je tedy $50 \cdot 3 = 150$.

Hodnocení. 2 body za výsledek; 4 body za vysvětlení postupu.

Z9–III–2

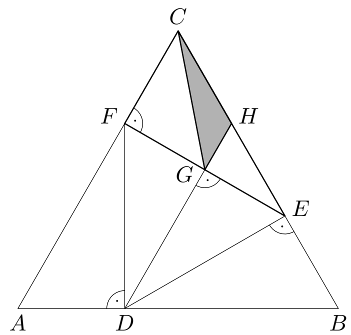
V rovnostranném trojúhelníku ABC je vepsán rovnostranný trojúhelník DEF, viz obrázek. Vrcholy D, E a F leží na stranách AB, BC a AC tak, že strany trojúhelníku DEF jsou kolmé ke stranám trojúhelníku ABC. Dále platí, že úsečka DG je těžnicí v trojúhelníku DEF a bod H je průsečíkem přímek DG a BC.

Určete poměr obsahů trojúhelníků HGC a BED. (*E. Patáková*)



Možné řešení. Ze symetrie celého útvaru (příp. z věty *usu*) plyne, že trojúhelníky BED a CFE jsou shodné. Budeme tedy určovat poměr obsahů trojúhelníků HGC a CFE.

Trojúhelník DEF je rovnostranný, proto u něj těžnice a výšky splývají, těžnice DG je tedy kolmá na úsečku EF. Podle zadání jsou kolmé také úsečky EF a AC, proto jsou přímky AC a DG, resp. FC a GH rovnoběžné. Protože DG je těžnicí trojúhelníku DEF, leží bod G ve středu úsečky EF. Odtud plyne, že GH je střední příčkou trojúhelníku CFE.



Protože trojúhelníky HGC a HGE mají společnou stranu HG a výšky příslušné k této straně jsou stejné (jmenovitě $|FG| = |GE|$), mají tyto trojúhelníky stejný obsah. Protože trojúhelníky HGE a CFE jsou podobné a odpovídající strany jsou v poměru $1 : 2$, jsou obsahy těchto trojúhelníků v poměru $1 : 4$. (Strana GH je dvakrát menší než strana FC

a výška trojúhelníku HGE ke straně GH je dvakrát menší než výška trojúhelníku CFE ke straně FC; obsah prvního trojúhelníku je tudíž čtyřikrát menší než obsah druhého.)

Poměr obsahů trojúhelníků HGC a BED je roven $1:4$.

Poznámka. Označíme-li délku úsečky BE jako a, můžeme v závislosti na této veličině vyjádřit obsahy trojúhelníků HGC a BED.

Z rovnoběžnosti přímek AC a DH vyplývá, že trojúhelník DBH je rovnostranný a trojúhelník BED je jeho polovinou. Proto je $|BD| = |BH| = 2a$ a velikost DE vypočítáme pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku BED:

$$|DE| = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Trojúhelník DEF je rovnostranný, tedy $|EF| = |DE| = a\sqrt{3}$. Bod G je v polovině úsečky EF, tedy

$$|GF| = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Trojúhelníky BED a CFE jsou shodné, tedy $|CF| = |BE| = a$. Úsečka GH je střední příčkou trojúhelníku CFE, tedy

$$|GH| = \frac{a}{2}.$$

Nyní můžeme vyjádřit obsahy zkoumaných trojúhelníků:

$$S_{BED} = \frac{1}{2}|BE| \cdot |DE| = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3},$$
$$S_{HGC} = \frac{1}{2}|GH| \cdot |GF| = \frac{1}{8}a^2\sqrt{3}.$$

Hodnocení. 1 bod za zjištění rovnoběžnosti přímek AC a DG; 2 body za určení $|GH| = \frac{1}{2}|FC|$; 3 body za vyjádření hledaných obsahů, resp. jejich poměru.

Z9–III–3

Danka měla papírovou květinu s deseti okvětními lístky. Na každém lístku byla napsána právě jedna číslice a žádná z číslic se na žádném jiném lístku neopakovala. Danka odtrhla dva lístky tak, že součet čísel na zbývajících lístcích byl násobkem devíti. Poté odtrhla další dva lístky tak, že součet čísel na zbývajících lístcích byl násobkem osmi. Nakonec odtrhla další dva lístky tak, že součet čísel na zbývajících lístcích byl násobkem desíti.

Najděte tři součty, které mohly postupně zůstávat po odtrhávání. Určete všechny takové trojice součtů. *(E. Novotná)*

Možné řešení. Součet všech čísel na okvětních lístcích je $0+1+\ldots+9 = 45$. Danka mohla při každém trhání odtrhnout součet nejméně 1 (kdyby odtrhla lístky 0 a 1) a nejvíce 17 (kdyby odtrhla lístky 8 a 9).

- Po prvním trhání musel na květině zůstat součet z intervalu 28 až 44 ($45 - 17 = 28$ a $45 - 1 = 44$). Mezi těmito čísly je jediný násobek devíti, a sice 36.
- Po druhém trhání musel na květině zůstat součet z intervalu 35 až 19 ($36 - 17 = 19$ a $36 - 1 = 35$). Mezi těmito čísly jsou dva násobky osmi, a sice 32 nebo 24.
- Obdobně stanovíme možné součty po třetím trhání:
  - Pokud po druhém trhání zůstal součet 32, musel po třetím trhání zůstat součet z intervalu 15 až 31 ($32 - 17 = 15$ a $32 - 1 = 31$). Mezi těmito čísly jsou dva násobky desíti, a sice 30 nebo 20.
  - Pokud po druhém trhání zůstal součet 24, musel po třetím trhání zůstat součet z intervalu 7 až 23 ($24-17 = 7$ a $24-1 = 23$). Mezi těmito čísly jsou dva násobky desíti, a sice 20 nebo 10.

Po jednotlivých trháních tedy mohly zůstat následující trojice součtů:

$$(36, 32, 20),\ (36, 32, 30),\ (36, 24, 20),\ (36, 24, 10).$$

U každé z těchto možností musíme ověřit, zda je lze skutečně zrealizovat, tzn. zda se dají dvojice lístků odtrhnout tak, aby žádná číslice nebyla použita dvakrát. V následujícím schématu píšeme nad šipky příklad, jaké lístky mohly být v jednotlivých krocích odtrženy:

$$45 \xrightarrow{0,9} 36 \xrightarrow{1,3} 32 \xrightarrow{4,8} 20$$
$$45 \xrightarrow{4,5} 36 \xrightarrow{1,3} 32 \xrightarrow{0,2} 30$$
$$45 \xrightarrow{2,7} 36 \xrightarrow{4,8} 24 \xrightarrow{1,3} 20$$
$$45 \xrightarrow{2,7} 36 \xrightarrow{4,8} 24 \xrightarrow{5,9} 10$$

Vidíme, že všechny uvedené možnosti lze zrealizovat, úloha má čtyři řešení.

Hodnocení. 2 body za nalezení čtyř možností; 2 body za ověření, že každou z možností lze zrealizovat; 2 body za postup, který vylučuje opomenutí další možnosti, event. za zdůvodnění, že žádná další možnost neexistuje.

Z9–III–4

Čtyři dívky sehrály na soustředění řadu zápasů. Na dotaz, kolik zápasů vyhrály, odpověděly velmi vyhýbavě:

„Kdybychom u každých dvou dívek sečetli počty jejich výher dohromady, dostali bychom čísla 8, 10, 12, 12, 14 a 16.“

Určete, kolik výher vybojovala každá z dívek. *(M. Volfová)*

Možné řešení. Označme počty výher jednotlivých dívek a, b, c, d. Kdyby některé dvě dívky měly stejný počet výher, musely by mezi součty v zadání být alespoň dvě dvojice stejných čísel (kdyby platilo např. $a = b$, platilo by $a + c = b + c$ a také $a + d = b + d$). To však není pravda, tudíž čísla a, b, c, d jsou navzájem různá.

Seřadíme-li tato čísla vzestupně $a < b < c < d$, potom platí:

$$a + b < a + c < a + d < b + d < c + d$$

a současně

$$a + c < b + c < b + d.$$

Vzhledem k tomu, že jsou v zadání dvě čísla stejné hodnoty, musí být $a + d = b + c$. Podle zadání sestavíme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
a + b &= 8,\\
a + c &= 10,\\
b + c &= 12,\\
a + d &= 12,\\
b + d &= 14,\\
c + d &= 16.
\end{aligned}
$$

Z 1. a 2. rovnice vyplývá, že $c = b+2$. Po dosazení do 3. rovnice dostáváme $b+b+2 = 12$, tedy $b = 5$. Dosadíme-li za b do 1., 3., resp. 5. rovnice, získáme i hodnoty ostatních neznámých: $a = 3$, $c = 7$, resp. $d = 9$.

Při řešení soustavy jsme nepoužili 4. a 6. rovnici, jejich platnost proto musíme ověřit dosazením vypočtených hodnot: $3 + 9 = 12$, $7 + 9 = 16$.

Jednotlivé dívky vybojovaly 3, 5, 7 a 9 výher.

Hodnocení. 2 body za sestavení soustavy rovnic a zdůvodnění, že až na označení a uspořádání neznámých je tato soustava určena jednoznačně; 4 body za vyřešení soustavy (pokud není provedena zkouška u rovnic, které nebyly použity při řešení, strhněte 1 bod).

Poznámka. K vyřešení úlohy není třeba sestavovat a řešit soustavu rovnic, celý postup lze vyjádřit slovně. Hodnocení takového řešení je obdobné výše uvedenému.