Hodnocení. 2 body za odvození toho, že celkový součet napsaných čísel je dělitelný 30; 2 body za určení obou dvojic číslic, které mohly být vynechány; 2 bod za kontrolu, zda je možné otrhat lístky podle zadání.

Za řešení obsahující pouze jednu možnost bez principu dělitelnosti 30 udělte nejvýše 3 body.

Z9–II–4

V hostinci U Temného hvozdu obsluhují obří dvojčata Pravdoslav a Křivomil. Pravdoslav je poctivý a účtuje vždy přesně, Křivomil je nečestný a ke každému koláčku a každému džbánku medoviny vždy připočte dva krejcary. Jednou tento hostinec navštívilo sedm trpaslíků, kteří si sedli ke dvěma stolům. Trpaslíci zaplatili za čtyři koláče u jednoho obra stejně jako za tři džbánky medoviny u druhého. Jindy trpaslíci platili za čtyři džbánky medoviny u Křivomila o 14 krejcarů více než za tři koláče u Pravdoslava.

Určete, kolik stojí u Pravdoslava jeden koláč a kolik jeden džbánek medoviny. Všechny ceny jsou v celých krejcarech a mezi oběma návštěvami se tyto ceny nijak neměnily.

(*M. Petrová, M. Dillingerová*)

Možné řešení. Skutečnou cenu (cenu u Pravdoslava) jednoho džbánku medoviny označíme m a skutečnou cenu jednoho koláče označíme k. Při první návštěvě mohli trpaslíci platit koláče u Pravdoslava a medovinu u Křivomila, nebo naopak. Tomu odpovídají dvě různá vyjádření:

$$4k = 3(m + 2), \tag{1a}$$

nebo

$$4(k + 2) = 3m. \tag{1b}$$

Podle informace o druhé návštěvě víme, že platí

$$4(m + 2) = 3k + 14. \tag{2}$$

Řešením soustavy rovnic (1a) a (2) je dvojice

$$k = 6,\ m = 6,$$

řešením soustavy rovnic (1b) a (2) je dvojice

$$k = -2,\ m = 0.$$

Vzhledem k tomu, že cena jakéhokoli zboží je vždy kladná, vyhovuje pouze první možnost: jak koláč, tak džbánek medoviny stojí u Pravdoslava 6 krejcarů.

Hodnocení. Po 1 bodu za zformulování každé z podmínek (1a), (1b) a (2); po 1 bodu za dořešení každé ze soustav rovnic; 1 bod za výsledek.

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Jana měla za domácí úkol vypočítat součin dvou šestimístných čísel. Při přepisování z tabule vynechala u jednoho čísla jednu číslici, a tak místo šestimístného čísla napsala pouze 85522. Když byla doma, zjistila svůj omyl. Pamatovala si však, že číslo, které špatně opsala, bylo dělitelné třemi. Rozhodla se, že se pokusí určit, jaké mohlo být původní číslo.

Určete, kolik takových šestimístných čísel existuje. (*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Celé číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný třemi. Součet číslic opsaného čísla je

$$8 + 5 + 5 + 2 + 2 = 22,$$

což není číslo dělitelné třemi. Vynechaná číslice tedy nebyla 0 a ciferný součet původního čísla musí být větší. Nejbližší větší čísla dělitelná třemi jsou 24, 27, 30, 33 atd. Kdyby byl ciferný součet 24, 27, resp. 30, byla by vynechanou číslicí 2, 5, resp. 8. (Ciferný součet 33 a víc nelze dostat doplněním jediné číslice.) Nyní je třeba určit, na která místa lze tyto číslice doplnit tak, aby vzniklo pokaždé jiné číslo. To nejjednodušeji zjistíme vypsáním všech možností:

- 285522, 825522, 852522, 855222,
- 585522, 855522, 855252, 855225,
- 885522, 858522, 855822, 855282, 855228.

Celkem tedy existuje 13 možností.

Hodnocení. 2 body za zjištění vynechané číslice a zdůvodnění; 3 body za vypsání všech možných čísel; 1 bod za počet možností.

Z9–II–2

Renata si sestrojila lichoběžník $PRST$ se základnami PR a ST, ve kterém současně platí:

- lichoběžník $PRST$ není pravoúhlý;
- trojúhelník TRP je rovnostranný;
- trojúhelník TRS je pravoúhlý;
- jeden z trojúhelníků TRS, TRP má obsah $10\,\mathrm{cm}^2$.

Určete obsah druhého z těchto dvou trojúhelníků. Najděte všechny možnosti.

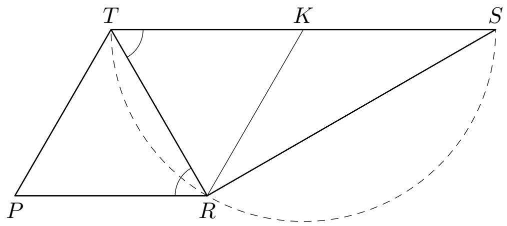
(*M. Petrová*)

Možné řešení. Ze druhé podmínky víme, že trojúhelník TRP je rovnostranný, proto všechny jeho vnitřní úhly mají velikost 60°. Úhly TRP a STR jsou střídavé, proto je také velikost úhlu STR rovna 60°.

Ze třetí podmínky víme, že trojúhelník TRS je pravoúhlý. Z předchozího odstavce víme, že pravý úhel nemůže být při vrcholu T, zároveň z první podmínky plyne, že pravý úhel nemůže být ani při vrcholu S. Takže pravý úhel je při vrcholu R. Dále označíme K střed přepony ST trojúhelníku TRS. Protože je tento trojúhelník pravoúhlý, leží vrchol R na kružnici se středem K a poloměrem $|KS| = |KT|$. Platí tedy

$$|KS| = |KT| = |KR|.$$

Trojúhelník TRK je tedy rovnoramenný se základnou RT. Navíc z předchozího víme, že úhel RTK má velikost 60°, proto i druhý úhel při základně má velikost 60°. Trojúhelník TRK je tedy rovnostranný a navíc shodný s rovnostranným trojúhelníkem TRP.



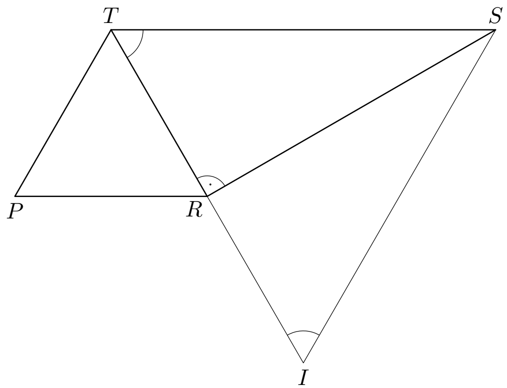
Trojúhelníky TRP a TRK mají stejný obsah, protože jsou shodné. Trojúhelníky TRK a SRK mají stejný obsah, protože strany KT a KS jsou stejně dlouhé a výška na tyto strany je společná. To znamená, že trojúhelník TRS má dvakrát větší obsah než trojúhelník TRP,

$$S_{TRS} = 2S_{TRP}. \tag{1}$$

Ze čtvrté podmínky víme, že obsah jednoho z těchto dvou trojúhelníků je $10\,\text{cm}^2$:

- Je-li $S_{TRS} = 10\,\text{cm}^2$, potom $S_{TRP} = 5\,\text{cm}^2$.
- Je-li $S_{TRP} = 10\,\text{cm}^2$, potom $S_{TRS} = 20\,\text{cm}^2$.

Jiné řešení. Stejným způsobem jako v předchozím řešení určíme vnitřní úhly trojúhelníku TRS. Bod T zobrazíme v osové souměrnosti podle osy RS, symetrický bod označíme I. Všechny vnitřní úhly trojúhelníku TIS mají velikost 60°, trojúhelník je tedy rovnostranný.



Strana TI je dvojnásobkem strany TR, trojúhelníky TRP a TIS jsou tedy podobné s poměrem podobnosti 1 : 2. Proto jsou jejich obsahy v poměru 1 : 4,

$$S_{TIS} = 4S_{TRP}.$$

Trojúhelník TRS tvoří polovinu trojúhelníku TIS, jeho obsah je tedy dvakrát větší než obsah trojúhelníku TRP. Tak docházíme ke vztahu (1) a úlohu uzavřeme stejně jako v předchozím řešení.

Hodnocení. Po 1 bodu za určení velikostí vnitřních úhlů RTS a TRS; 3 body za zdůvodnění rovnosti (1); 1 bod za výsledné obsahy $5\,\text{cm}^2$ a $20\,\text{cm}^2$.

Z9–II–3

Lenka měla papírovou květinu s osmi okvětními lístky. Na každém lístku byla napsána právě jedna číslice a žádná z číslic se na žádném jiném lístku neopakovala. Když si Lenka s květinou hrála, uvědomila si několik věcí:

- Z květiny bylo možné odtrhnout čtyři lístky tak, že součet na nich napsaných čísel by byl stejný jako součet čísel na neodtrhnutých lístcích.
- Taky bylo možné odtrhnout čtyři lístky tak, že součet na nich napsaných čísel by byl dvakrát větší než součet čísel na neodtrhnutých lístcích.
- Dokonce bylo možné odtrhnout čtyři lístky tak, že součet na nich napsaných čísel by byl čtyřikrát větší než součet čísel na neodtrhnutých lístcích.

Určete, jaké číslice mohly být napsány na okvětních lístcích. (*E. Novotná*)

Možné řešení. Z první podmínky víme, že lístky lze rozdělit do dvou skupin tak, že součet jedné skupiny čísel je stejný jako součet druhé. Z toho vyplývá, že součet všech čísel napsaných na lístcích musí být dělitelný dvěma. Podobnou úvahou z druhé podmínky vyvozujeme, že součet všech napsaných čísel je dělitelný třemi; z poslední podmínky plyne, že tento součet musí být dělitelný také pěti. Součet všech napsaných čísel je proto dělitelný 30.

Součet všech použitelných číslic je $0+1+\ldots+8+9 = 45$, a proto je výše diskutovaný součet roven právě 30. Na lístcích tedy nemohly být použity takové dvě číslice, jejichž součet byl roven 15. To mohly být buď číslice 7 a 8, nebo 6 a 9. V obou případech musíme ověřit, zda je možné otrhat lístky s ostatními číslicemi tak, aby platily podmínky ze zadání.

- Ověřme možnost, kdy na květině nebyly číslice 7 a 8:
  Po trhání dle první podmínky mohly zůstat např. číslice $0 + 1 + 5 + 9 = 15$,
  po trhání dle druhé podmínky mohly zůstat např. číslice $0 + 1 + 3 + 6 = 10$,
  po trhání dle třetí podmínky mohly zůstat číslice $0 + 1 + 2 + 3 = 6$.
- Ověřme možnost, kdy na květině nebyly číslice 6 a 9:
  Po trhání dle první podmínky mohly zůstat např. číslice $0 + 2 + 5 + 8 = 15$,
  po trhání dle druhé podmínky mohly zůstat např. číslice $0 + 1 + 2 + 7 = 10$,
  po trhání dle třetí podmínky mohly zůstat číslice $0 + 1 + 2 + 3 = 6$.

Na okvětních lístcích tedy mohly být buď všechny číslice kromě 7 a 8, nebo všechny kromě 6 a 9.