

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Andělka, Barča, Honzík, Vláda a Matyáš se zúčastnili soutěže v hodu vlašťovkou. Každý házel jednou a součet délek jejich hodů byl 41 metrů. Matyáš hodil nejméně, což bylo o 90 cm méně než hodila Andělka, a ta hodila o 60 cm méně než Vláda. Honzík hodil nejdál a trefil se vlašťovkou do pásky označující celé metry. Pokud by soutěžili pouze Matyáš, Vláda a Andělka, průměrná délka hodu by byla o 20 cm kratší.

Určete délky hodů všech jmenovaných dětí. (L. Dedková)

Možné řešení. Označíme si délky hodů v metrech počátečními písmeny soutěžících. (Všechny následující výsledky jsou také v metrech a tuto jednotku ve výpočtech neuvádíme.) Součet délek všech jejich hodů byl 41 metrů,

$$a + b + h + v + m = 41, \quad (1)$$

a průměrná délka jejich hodů byla:

$$\frac{a + b + h + v + m}{5} = 8,2.$$

Pokud by soutěžili pouze Matyáš, Vláda a Andělka, průměrná délka hodu by byla o 20 cm kratší, tzn. přesně 8 m:

$$\frac{a + v + m}{3} = 8.$$

Po úpravě dostáváme:

$$a + v + m = 24. \quad (2)$$

Ze zadání víme, že Matyáš hodil nejméně, což bylo o 90 cm méně, než hodila Andělka, a ta hodila o 60 cm méně než Vláda:

$$a = m + 0,9, \quad v = a + 0,6 = m + 1,5. \quad (3)$$

Dosazením do rovnice (2) dostáváme:

$$\begin{aligned} m + 0,9 + m + 1,5 + m &= 24, \\ m &= 7,2. \end{aligned}$$

Dosazením do rovnic (3) dopočteme délky hodů Andělky a Vládi:

$$a = 7,2 + 0,9 = 8,1, \quad v = 7,2 + 1,5 = 8,7.$$

Podle rovnice (2) nahradíme v rovnici (1) součet $a + v + m$ číslem 24, upravíme a získáme rovnici:

$$b + h = 17.$$

Ze zadání dále víme, že Honzík hodil nejdál a trefil se vlašťovkou do pásky označující celé metry. Porovnáním se zatím nejdelším vypočteným hodem zjišťujeme, že Honzík hodil aspoň 9 metrů. Kdyby Honzík hodil právě 9 metrů, Barča by hodila $17 - 9 = 8$ metrů. Kdyby Honzík hodil 10 metrů (nebo více), hodila by Barča 7 metrů (nebo méně). To však není možné, protože nejméně ze všech hodil Matyáš. Úloha má tedy jednoznačné řešení, a to

$$a = 8,1, \quad b = 8, \quad h = 9, \quad v = 8,7, \quad m = 7,2.$$

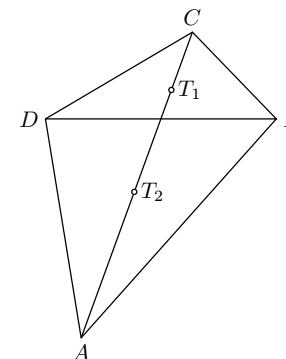
Hodnocení. 2 body za zjištění, že $a + v + m = 24$; 2 body za vypočtení délek hodů Andělky, Vládi a Matyáše; 2 body za vypočtení délek hodů Barči a Honzy včetně zdůvodnění, že jde o jediné řešení.

Z8–II–2

Je dán čtyřúhelník $ABCD$, viz obrázek. Bod T_1 je těžištěm trojúhelníku BCD , bod T_2 je těžištěm trojúhelníku ABD a body T_1 a T_2 leží na úsečce AC . Délka úsečky T_1T_2 je 3 cm a bod D má od úsečky AC vzdálenost 3 cm.

Určete obsah čtyřúhelníku $ABCD$.

(E. Patáková)



Možné řešení. Označme E průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$. Body T_1 a T_2 jsou těžiště trojúhelníků BCD a ABD , úsečky CE a AE jsou tedy těžnicemi v těchto trojúhelnících, a proto je bod E středem úsečky BD . Protože $|DE| = |EB|$, jsou si rovny obsahy trojúhelníků DEC a EBC a také obsahy trojúhelníků DEA a EBA . Odtud plyne, že trojúhelníky ACD a ACB mají stejný obsah. Ze zadání známe velikost výšky trojúhelníku ACD z vrcholu D , k vyjádření jeho obsahu potřebujeme určit délku úsečky AC .

Z vlastností těžišť víme, že

$$|CE| = 3 \cdot |T_1E|, \quad |AE| = 3 \cdot |T_2E|.$$

Velikost úsečky AC je

$$|AC| = |AE| + |EC| = 3 \cdot (|T_2E| + |ET_1|) = 3 \cdot |T_2T_1| = 3 \cdot 3 = 9 \text{ (cm)}.$$

Velikost výšky trojúhelníku ACD z vrcholu D je 3 cm, obsah trojúhelníku je tedy roven

$$S_{ACD} = \frac{9 \cdot 3}{2} = \frac{27}{2} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

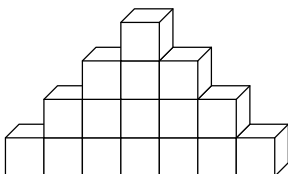
Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je roven

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ACD} = 27 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Hodnocení. 3 body za určení délky úsečky AC ; 2 body za zdůvodnění rovnosti obsahů trojúhelníků ACD a ACB ; 1 bod za určení hledaného obsahu.

Z8–II–3

Ve městě rekordů a kuriozit postavili pyramidu z kostek. V horní vrstvě je jedna kostka a počty kostek v jednotlivých vrstvách se směrem dolů zvětšují vždy o dvě (několik horních vrstev stavby je znázorněno na obrázku).



První, tedy nejspodnější vrstva má černou barvu, druhá šedou, třetí bílou, čtvrtá opět černou, pátá šedou, šestá bílou a takto se barvy pravidelně střídají až k horní vrstvě.

Určete, kolik má pyramida vrstev, pokud víte, že černých kostek je použito o 55 více než bílých. *(L. Šimůnek)*

Možné řešení. V prvních třech vrstvách odpočítaných odspoda je počet černých kostek o 4 větší než počet bílých. Tvrzení platí i pro každou další trojici vrstev s černými kostkami vespod. V zadání není uvedeno,

- zda lze stavbu rozdělit beze zbytku na takové trojice,
- zda je nad horní trojici ještě jedna vrstva, a sice černá,
- zda jsou nad horní trojici ještě dvě vrstvy, černá a šedá.

V případě a) by rozdíl mezi počty černých a bílých kostek musel být násobkem čtyř, v případě b) by tento rozdíl musel být násobkem čtyř zvětšeným o jedna a v případě c) by musel být násobkem čtyř zvětšeným o tři.

Pokud zadaný rozdíl 55 vydělíme 4, dostaneme 13 a zbytek 3. Odtud vidíme, že z uvedených možností platí c). Pyramida má celkem $13 \cdot 3 + 2 = 41$ vrstev.

Jiné řešení. Řešení rozdělíme na tři části. V části a) budeme předpokládat, že vrchní vrstva je bílá, v části b), že vrchní vrstva je černá, a v části c), že vrchní vrstva je šedá. V každé části řešení budeme do tabulky postupně přidávat zvětšující se vrstvy. Zadání uvádí, že největší vrstva je černá, proto u každé černé vrstvy zaznameneáme rozdíl mezi

počty černých a bílých kostek v dosud zapsaných vrstvách. Tabulku přestaneme vypisovat, jakmile bude tento rozdíl roven 55 nebo bude větší.

a) Horní kostka bílá:

vrstva shora	1	2	3	4	5	6	37	38	39	40	41	42
kostek ve vrstvě	1	3	5	7	9	11	73	75	77	79	81	83
barva	b	š	č	b	š	č	b	š	č	b	š	č
rozdíl	4			8			52			56		

b) Horní kostka černá:

vrstva shora	1	2	3	4	5	6	7	38	39	40	41	42	43
kostek ve vrstvě	1	3	5	7	9	11	13	75	77	79	81	83	85
barva	č	b	š	č	b	š	č	b	š	č	b	š	č
rozdíl	1	5			9			53			57		

c) Horní kostka šedá:

vrstva shora	1	2	3	4	5	6	7	8	...	36	37	38	39	40	41
kostek ve vrstvě	1	3	5	7	9	11	13	15	...	71	73	75	77	79	81
barva	š	č	b	š	č	b	š	č	...	b	š	č	b	š	č
rozdíl	3		7			11			...	51			55		

K rozdílu 55 jsme došli pouze v tabulce c), podle které má stavba 41 vrstev.

Hodnocení. 2 + 2 body za vyloučení možností a) a b); 2 body za správný počet vrstev.