

II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Děda Vendelín šel se svými dvěma vnuky Cyrilem a Metodějem koupit rybářské pruty. Cena prutů zaujala Cyrila i dědu. Šlo o čtyřmístné číslo, ve kterém první číslice byla o jednu větší než třetí číslice, ale o jednu menší než poslední číslice. Součet všech čtyř číslic byl 6. Cyril si ještě všiml, že první dvojčíslí představovalo dvojmístné číslo o 7 větší než dvojčíslí druhé. Dědu však zaujalo číslo proto, že bylo součinem jeho věku a věku obou vnuků, přitom každý z vnuků byl starší než jeden rok.

Kolik roků bylo dědovi Vendelínovi a kolik jeho vnukům? (L. Hozová)

Možné řešení. Číslo vyjadřující cenu prutů je čtyřmístné, přitom první číslice je o jednu větší než číslice třetí a o jednu menší než čtvrtá. Zmíněné tři číslice jsou tedy navzájem různé a součet všech čtyř číslic má být 6. Dosud uvedeným podmínkám vyhovují pouze čísla 2013 a 1302. Pouze v prvním případě však také platí, že první dvojčíslí představuje číslo o 7 větší než dvojčíslí druhé — cena prutů tedy byla 2013.

Vyjádřit 2013 jako součin tří čísel, z nichž žádné není rovno jedné, lze pouze jediným způsobem:

$$2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61.$$

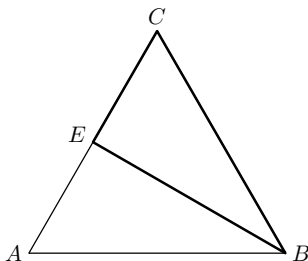
Dědovi Vendelínovi bylo 61 let a jeho vnukům 3 a 11 roků.

Hodnocení. 3 body za objevení čísla 2013 včetně zdůvodnění; 3 body za rozklad čísla a odpověď.

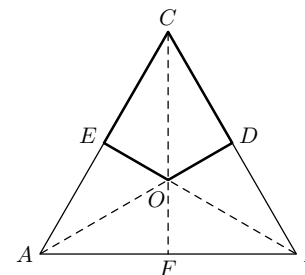
Z7–II–2

Petra má rovnostranný trojúhelník ABC . Nejdřív trojúhelník přehmula tak, aby bod A splynul s bodem C . Potom vzniklý útvar přehmula tak, že bod B splynul s bodem C . Tento útvar poté obkreslila na papír a zjistila, že jeho obsah je 12 cm^2 . Určete obsah původního trojúhelníku. (E. Novotná)

Možné řešení. Po prvním přehnutí splynul bod A s bodem C . Přímka, podle které se přehýbalo, je osou úsečky AC , jež v rovnostranném trojúhelníku ABC prochází bodem B . Po tomto přehnutí dostala Petra trojúhelník BEC , který tvoří právě polovinu trojúhelníku ABC (bod E značí střed úsečky AC , viz obrázek).



Po druhém přehnutí splynul také bod B s bodem C . Přímka, podle které se přehýbalo, je osou úsečky BC , jež v původním trojúhelníku prochází bodem A . Po tomto přehnutí dostala Petra čtyřúhelník $OECD$ (D značí střed úsečky BC a O je průsečík os).



Osy stran v rovnostranném trojúhelníku ABC jsou osami souměrnosti tohoto trojúhelníku. Odtud plyne, že čtyřúhelníky $OECD$, $ODBF$ a $OFAE$ jsou navzájem shodné a každý z nich má obsah 12 cm^2 (F značí střed úsečky AB). Obsah trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů těchto tří čtyřúhelníků:

$$S_{ABC} = 3 \cdot 12 = 36 (\text{cm}^2).$$

Hodnocení. 2 body za správnou interpretaci prvního přehýbání (trojúhelník BEC); 2 body za správnou interpretaci druhého přehýbání (čtyřúhelník $OECD$); 2 body za vyjádření obsahu trojúhelníku ABC .

Z7–II–3

Do skladu přivezli cement v pytlích po 25 kg a po 40 kg. Menších pytlů bylo dvakrát více než těch větších. Skladník nahlásil vedoucímu počet všech přivezených pytlů, ale nezmínil se, kolik je kterých. Vedoucí si myslel, že všechny pytle váží 25 kg. Nahlášený počet pytlů tedy vynásobil číslem 25 a výsledek zadokumentoval jako hmotnost dodávky cementu. Přes noc zloději ukradli 60 větších pytlů, a tak ve skladu zbylo přesně tolik kg cementu, kolik vedoucí zapsal. Kolik kg cementu zbylo? (L. Šimůnek)

Možné řešení. Zloději ukradli $60 \cdot 40 = 2400 \text{ kg}$. Před krádeží chybělo v dokumentaci z každého velkého pytle 15 kg. Celková nezapsaná hmotnost se rovná té odcizené, velkých pytlů tedy bylo dodáno

$$2400 : 15 = 160.$$

Malých pytlů bylo dvakrát více, tj. 320; celkem dodávka obsahovala $160 + 320 = 480$ pytlů. Vedoucí zadokumentoval hmotnost $480 \cdot 25 = 12000 \text{ kg}$. Z dodaného cementu zbylo množství odpovídající dokumentaci, tedy 12000 kg .

Hodnocení. 3 body za počet velkých pytlů před krádeží; 3 body za hmotnost zbylého cementu.