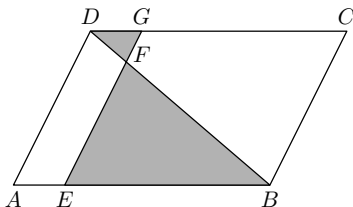


II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Je dán kosodélník $ABCD$ jako na obrázku. Po straně AB se pohybuje bod E a po straně CD se pohybuje bod G tak, že úsečka EG je rovnoběžná s AD . Když byl průsečík F úseček EG a BD v pětíně úhlopříčky BD (blíže k bodu D), byl obsah vybarvené části kosodélníku o 1 cm^2 větší, než když byl ve dvou pětínách (opět blíže k D). Určete obsah kosodélníku $ABCD$.
(E. Patáková)



Možné řešení. Délku strany AB označíme a a velikost výšky kosodélníku $ABCD$ na tuto stranu označíme v ; obsah kosodélníku je roven av . Trojúhelníky DGF a BEF jsou podobné podle věty uu (úhly DFG a BFE jsou vrcholové, úhly FEB a FGD střídavé). Dále označme v_1 velikost výšky trojúhelníku DGF na stranu DG a v_2 velikost výšky trojúhelníku BEF na stranu BE .

a) Bod F je v jedné pětíně úhlopříčky BD . Poměr podobnosti trojúhelníků DGF a BEF je v tomto případě $1 : 4$. Pro odpovídající si výšky těchto trojúhelníků platí $v_1 + v_2 = v$. Z uvedeného plyne, že $v_1 = \frac{1}{5}v$ a $v_2 = \frac{4}{5}v$. Všimněme si, že $|DG| = |AE|$, a tedy že pro délky odpovídajících si stran těchto trojúhelníků platí $|DG| + |BE| = a$. Proto $|DG| = \frac{1}{5}a$ a $|BE| = \frac{4}{5}a$ a obsahy vybarvených trojúhelníků jsou:

$$S_{DGF} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}a \cdot \frac{1}{5}v \right) = \frac{1}{50}av,$$

$$S_{BEF} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}a \cdot \frac{4}{5}v \right) = \frac{16}{50}av.$$

Vybarvená část kosodélníku má v tomto případě obsah

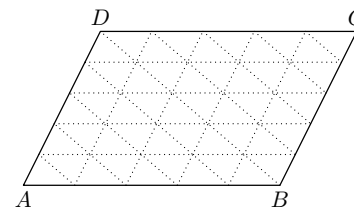
$$S_{DGF} + S_{BEF} = \frac{17}{50}av.$$

b) Bod F je ve dvou pětínách úhlopříčky BD . Poměr podobnosti trojúhelníků DGF a BEF je v tomto případě $2 : 3$. Obdobně jako v předchozím odstavci odvodíme, že $S_{DGF} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}a \cdot \frac{2}{5}v \right) = \frac{4}{50}av$ a $S_{BEF} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}a \cdot \frac{3}{5}v \right) = \frac{9}{50}av$. Vybarvená část kosodélníku má v tomto případě obsah

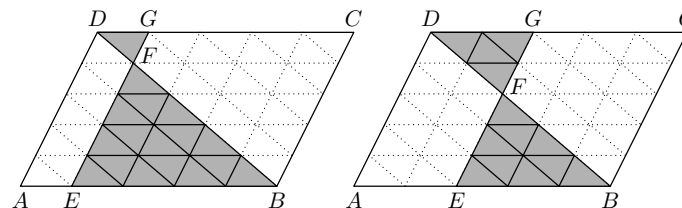
$$S_{DGF} + S_{BEF} = \frac{13}{50}av.$$

Ze zadání víme, že rozdíl $\frac{17}{50}av - \frac{13}{50}av = \frac{2}{25}av$ je právě 1 cm^2 . Odtud plyne, že $av = = \frac{25}{2} \text{ cm}^2$. Obsah kosodélníku $ABCD$ je $12,5 \text{ cm}^2$.

Jiné řešení. Úsečky AB a BC rozdělíme na pětiny. Rovnoběžky s těmito úsečkami vedené vzniklými body rozdělí kosodélník $ABCD$ na 25 shodných kosodélníčků. Vyznačíme-li ještě rovnoběžky s úhlopříčkou BD , bude kosodélník $ABCD$ rozdělen na 50 shodných trojúhelníčků, viz obrázek.



Je-li bod F v jedné pětíně úhlopříčky BD , pak vybarvená část kosodélníku sestává ze 17 trojúhelníčků. Je-li bod F ve dvou pětínách úhlopříčky BD , vybarvená část kosodélníku v tomto případě sestává ze 13 trojúhelníčků.



Rozdíl 1 cm^2 odpovídá obsahu 4 trojúhelníčků. Obsah kosodélníku $ABCD$ je tedy roven $50 \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Hodnocení. 1 bod za nalezení vlastnosti, pomocí které lze porovnat obsahy vybarvených trojúhelníků (např. podobnost, rozdělení na trojúhelníčky apod.); 3 body za vyjádření vztahu, ze kterého lze přesně určit rozdíl obsahů v daných situacích (např. rovnice plynoucí z podobnosti trojúhelníků, zjištění, o kolik trojúhelníčků se vybarvené části liší apod.); 2 body za dopočtení obsahu kosodélníku $ABCD$.

Z9–II–2

Sněhurka má na zahradě řadu 101 sádrových trpaslíků seřazených podle hmotnosti od nejtěžšího po nejlehčího, přičemž rozdíl hmotností každých dvou sousedních trpaslíků je stejný. Jednou Sněhurka trpaslíky vážila a zjistila, že první, nejtěžší, trpaslík váží přesně 5 kg. Sněhurku nejvíce překvapilo, že když na váhu postavila 76. až 80. trpaslíka, vážili dohromady tolik, co 96. až 101. trpaslík. Jaká je hmotnost nejlehčího trpaslíka?

(M. Mach)

Možné řešení. Označme rozdíl hmotností dvou sousedních trpaslíků jako x . První trpaslík váží 5 kg, druhý $5 - x$, třetí $5 - 2x$, ..., n -tý trpaslík váží $5 - (n - 1) \cdot x$ (kg). Součet hmotností 76. až 80. trpaslíka je

$$(5 - 75x) + (5 - 76x) + (5 - 77x) + (5 - 78x) + (5 - 79x) = 25 - 385x.$$

Součet hmotností 96. až 101. trpaslíka je

$$(5 - 95x) + (5 - 96x) + (5 - 97x) + (5 - 98x) + (5 - 99x) + (5 - 100x) = 30 - 585x.$$

Dostáváme tedy rovnici, ze které vypočteme x :

$$\begin{aligned} 25 - 385x &= 30 - 585x, \\ 200x &= 5, \\ x &= 0,025 \text{ (kg)}. \end{aligned}$$

Nejlehčí trpaslík váží $5 - 100 \cdot 0,025 = 2,5$ (kg).

Jiné řešení. Označme rozdíl hmotností dvou sousedních trpaslíků jako x . První trpaslík váží 5 kg, druhý $5 - x$, třetí $5 - 2x$, ..., 101. trpaslík váží $5 - 100x$ (kg).

Rozdíl hmotností 76. a 96. trpaslíka je $20x$. Stejný rozdíl je i mezi 77. a 97., 78. a 98., 79. a 89., 80. a 100. trpaslíkem. Celková hmotnost 76. až 80. trpaslíka je tedy o $100x$ větší než celková hmotnost 96. až 100. trpaslíka. Aby 76. až 80. trpaslík vážili dohromady přesně tolik jako 96. až 101. trpaslík, musí být hmotnost 101. trpaslíka rovna $100x$.

Získáváme tedy rovnici, ze které jednoduše vypočteme x :

$$\begin{aligned} 5 - 100x &= 100x, \\ 200x &= 5, \\ x &= 0,025 \text{ (kg)}. \end{aligned}$$

Nejlehčí trpaslík váží $100 \cdot 0,025 = 2,5$ (kg).

Hodnocení. 4 body za sestavení rovnice umožňující výpočet rozdílu hmotností dvou sousedních trpaslíků; 2 body za úpravy rovnice a výsledek úlohy.

Poznámka. Ani u jednoho uvedeného řešení soutěžící nemusí nutně vypočítávat, že $x = 0,025$ kg. Vystačí např. se zjištěním, že $100x = 2,5$ kg.

Z9–II–3

Turistický oddíl pořádal třídní cyklistický výlet. První den chtěli ujet $\frac{1}{3}$ celé trasy, ale bohužel ujeli o 4 km méně. Druhý den chtěli ujet víc, celou polovinu zbytku, ale bylo to nakonec zase o 2 km méně. Třetí den ale vše dohonili, ujeli $\frac{10}{11}$ zbytku cesty a ještě 4 km. Jak dlouhá byla trasa a kolik ujeli první, druhý a třetí den? (M. Volfová)

Možné řešení. Postupujeme úsudkem „odzadu“.

$\frac{1}{11}$ zbytku cesty po druhém dnu je rovna 4 km, tedy celý zbytek byl $11 \cdot 4 = 44$ (km). Kdyby druhý den ujeli (jak plánovali) o 2 km více, byl by zbytek po druhém dnu o 2 km menší, tedy jen 42 km, a tvořil by polovinu toho, co po prvním dnu zbývalo do cíle. Po prvním dnu zbývalo do cíle 84 km.

Kdyby první den ujeli podle plánu celou $\frac{1}{3}$ trasy, tedy o 4 km více, byl by zbytek o 4 km menší, tj. jen 80 km, a představoval by $\frac{2}{3}$ celé trasy. $\frac{1}{3}$ trasy byla tedy 40 km a celá 120 km.

Provedeme shrnutí, při němž spočítáme ujeté vzdálenosti v jednotlivých dnech. První den chtěli ujet 40 km, ale ujeli jen 36 km; zbývalo jim do cíle 84 km. Druhý den chtěli ujet polovinu zbytku, tj. 42 km, ale ujeli jen 40 km; zbývalo jim 44 km. Třetí den ujeli $\frac{10}{11}$ zbytku, tj. 40 km, a ještě 4 km; byli tedy v cíli.

V jednotlivých dnech ujeli postupně 36 km, 40 km a 44 km, dohromady 120 km.

Jiné řešení. Postupujeme pomocí algebry „odpředu“; délku celé trasy v km označíme x .

První den ujeli $\frac{1}{3}x - 4$, zbylo jim $\frac{2}{3}x + 4$.

Druhý den ujeli $\frac{1}{2} \cdot (\frac{2}{3}x + 4) - 2 = \frac{1}{3}x$, zbylo jim $\frac{1}{3}x + 4$.

Třetí den ujeli $\frac{10}{11} \cdot (\frac{1}{3}x + 4) + 4 = \frac{10}{33}x + \frac{40}{11} + 4$.

Délka celé trasy tedy byla

$$x = \frac{1}{3}x - 4 + \frac{1}{3}x + \frac{10}{33}x + \frac{40}{11} + 4.$$

Po úpravách dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{33}x &= \frac{40}{11}, \\ x &= 120. \end{aligned}$$

Po dosažení do výše uvedených výrazů zjišťujeme, že v jednotlivých dnech ujeli postupně 36 km, 40 km a 44 km, dohromady tedy 120 km.

Hodnocení. Po 1 bodu za délku trasy první, druhý a třetí den a délku celé trasy; zbylé 2 body podle úplnosti komentáře.

Z9–II–4

Organizátor výstavy „Stavím, stavíš, stavíme“ rozdělil expozici do dvou částí. Protože ho zajímala reakce návštěvníků výstavy, vyplnil každý návštěvník při odchodu jednoduchý dotazník. Vyplývaly z něj tyto zajímavé skutečnosti:

- 96 % návštěvníků, kterým se líbila první část, se líbila i druhá část,
- 60 % návštěvníků, kterým se líbila druhá část, se líbila i první část,
- 59 % návštěvníků se nelíbila ani první část, ani druhá část.

Kolik procent všech návštěvníků uvedlo, že se jim líbila první část výstavy?

(M. Petrová)

Možné řešení. Označíme n počet všech lidí, kteří navštívili výstavu, dále p počet návštěvníků, kterým se líbila první část výstavy, a d počet návštěvníků, kterým se líbila druhá část výstavy. Hledáme nějaký vztah mezi n a p , ze kterého již snadno odvodíme odpověď na otázku.

Vyjádríme počet návštěvníků, kterým se líbily obě části: z první podmínky to je $0,96p$, z druhé podmínky $0,6d$. Samozřejmě platí:

$$\begin{aligned} 0,96p &= 0,6d, \\ 96p &= 6d, \\ 8p &= 5d, \\ 1,6p &= d. \end{aligned}$$

Odtud můžeme vyjádřit počet lidí v jednotlivých skupinách pomocí p . Počet lidí, kterým se líbila

- první část, ale ne druhá část, je $p - 0,96p = 0,04p$,
- druhá část, ale ne první část, je $d - 0,6d = 0,4d = 0,4 \cdot 1,6p = 0,64p$,
- první i druhá část, je samozřejmě $0,96p$.

Sečtením zjistíme, kolika lidem se líbila aspoň jedna část výstavy:

$$0,04p + 0,64p + 0,96p = 1,64p.$$

Podle třetí podmínky v zadání víme, že $0,59n$ návštěvníků se nelíbila ani jedna část výstavy; tedy $0,41n$ návštěvníků se alespoň jedna část výstavy líbila. Tento počet zároveň podle předchozího odpovídá $1,64p$. Sestavíme rovnici, kterou dále upravíme:

$$0,41n = 1,64p,$$

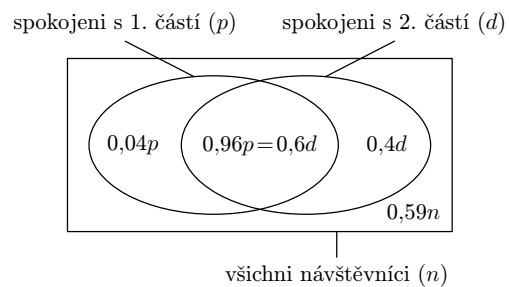
$$41n = 164p,$$

$$n = 4p,$$

$$0,25n = p.$$

Odtud plyne, že 25 % všech návštěvníků uvedlo, že se jim líbila první část výstavy.

Vztahy mezi diskutovanými počty návštěvníků můžeme znázornit např. následujícím způsobem:



Hodnocení. 2 body za vyjádření $d = 1,6p$ či analogický vztah; 2 body za vyjádření počtu návštěvníků, kterým se líbila aspoň jedna část, pomocí počtu návštěvníků, kterým se líbila první část (nebo za analogický poznatek); 2 body za výsledných 25 %.