

II. kolo kategorie Z7

Z7-II-1

Petr a Karel spolu sehráli řadu partií šachu. Domluvili se, že za výhru si hráč připočítá 3 body, za prohru 2 body odečte, za remízu žádné body nejsou. Kamarádi chtěli vědět, kolik už Petr s Karlem sehráli partií a kdo nyní vede, ale dozvěděli se jenom, že Petr šestkrát vyhrál, dvakrát remizoval, několikrát prohrál a Karel že má právě 9 bodů. Kolik partií chlapci sehráli a kdo nyní vede? (M. Volfová)

Možné řešení. Karel musel vyhrát tolikrát, aby mu po odečtení 12 bodů za 6 proher zbylo ještě 9 bodů. Na výhrách tedy musel získat $9 + 12 = 21$ bodů, čemuž odpovídá 7 výher. Petr tudíž sedmkrát prohrál. Ze zadání ještě víme, že také dvakrát remizoval a šestkrát vyhrál, má tedy celkem $6 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 7 \cdot 2 = 4$ body.

Chlapci sehráli $6 + 2 + 7 = 15$ partií, vede Karel.

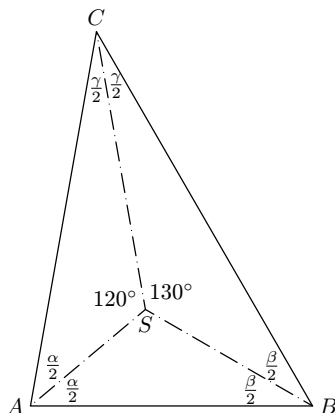
Hodnocení. 4 body za správnou úvahu o počtu výher Karla; 1 bod za zdůvodněný poznatek, že vede Karel; 1 bod za stanovení počtu odehraných partií.

Poznámka. Soutěžící nemusí určovat Petrův bodový zisk. Poznatek, že vede Karel, může totiž zdůvodnit i pouhým porovnáním sedmi Karlových výher se šesti Petrovými výhrami.

Z7-II-2

V trojúhelníku ABC se osy jeho vnitřních úhlů protínají v bodě S . Úhel BSC má velikost 130° , úhel ASC má 120° . Jaké jsou velikosti všech vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC ? (E. Patáková)

Možné řešení. Označíme vnitřní úhly v trojúhelníku α , β a γ , viz obrázek.



Součet vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je 180° . Proto i v trojúhelníku ASC platí

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + 120^\circ = 180^\circ,$$

odkud dopočítáme

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} &= 60^\circ, \\ \alpha + \gamma &= 120^\circ. \end{aligned}$$

V trojúhelníku ABC platí $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, odkud nyní umíme vyjádřit úhel β :

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Obdobně v trojúhelníku BSC :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + 130^\circ &= 180^\circ, \\ \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} &= 50^\circ, \\ \gamma + \beta &= 100^\circ. \end{aligned}$$

Protože $\beta = 60^\circ$, musí být $\gamma = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$ a konečně $\alpha = 120^\circ - 40^\circ = 80^\circ$ (alternativně $\alpha = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$).

Hodnocení. 2 body za určení součtu $\alpha + \gamma = 120^\circ$, příp. $\gamma + \beta = 100^\circ$; 4 body za určení velikostí všech vnitřních úhlů.

Z7-II-3

Trojmištné přirozené číslo budeme nazývat *sudomilé*, jestliže obsahuje dvě sudé číslice a číslici 1. Trojmištné přirozené číslo budeme nazývat *lichomilé*, jestliže obsahuje dvě liché číslice a číslici 2. Zjistěte, kolik je všech sudomilých a kolik lichomilých čísel.

(E. Novotná)

Možné řešení. Nejdřív určíme počet všech sudomilých čísel:

- Je-li číslice 1 na místě stovek, může být na místě desítek libovolná sudá číslice (0, 2, 4, 6, 8) a na místě jednotek stejně tak; to je celkem $5 \cdot 5 = 25$ možností.
- Je-li číslice 1 na místě desítek, může být na místě stovek libovolná nenulová sudá číslice (2, 4, 6, 8) a na místě jednotek libovolná sudá číslice; to nám dává dalších $4 \cdot 5 = 20$ možností.
- Je-li číslice 1 na místě jednotek, může být na místě stovek libovolná nenulová sudá číslice a na místě desítek libovolná sudá číslice; to nám dává dalších $4 \cdot 5 = 20$ možností.

Celkový počet sudomilých čísel je $25 + 20 + 20 = 65$.

Lichomilá čísla obsahují kromě 2 pouze liché číslice. Můžeme uvažovat stejně jako při počítání sudomilých čísel, avšak tentokrát lze v každém případě napočítat $5 \cdot 5 = 25$ možností (na každém volném místě může být libovolná liché číslice 1, 3, 5, 7, 9). Celkový počet lichomilých čísel je $3 \cdot 25 = 75$.

Hodnocení. 4 body za určení počtu sudomilých čísel; 2 body za určení počtu lichomilých čísel.