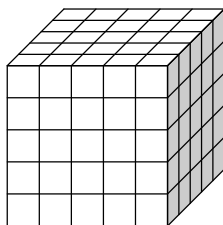


II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

Danka a Janka dostaly k narozeninám dvě stejné bílé kostky, přitom každá byla slepena ze 125 malých kostiček jako na obrázku. Aby kostky rozeznaly, rozhodly se, že je obarví. Danka vzala štětec a svou kostku a natřela tři z jejích šesti stěn načerveno. Janka obarvila tři stěny své kostky nazeleno. Po čase obě kostky rozkrájely na jednotlivé kostičky, z nichž byly kostky slepeny. Když tak učinily, s překvapením zjistily, že počet kostiček, které mají aspoň jednu stěnu červenou, se liší od počtu kostiček, které mají aspoň jednu stěnu zelenou. Zjistěte, jaký je tento rozdíl.

(E. Novotná)



Možné řešení. Víme, že jak Danka, tak Janka obarvily tři stěny kostky. To lze udělat pouze dvojmým způsobem:

1. Některé dvě protilehlé stěny jsou obarvené, potom je obarvená ještě jedna stěna mezi nimi; uvažujme např. horní, dolní a jednu boční stěnu.
2. Žádné dvě protilehlé stěny nejsou obarvené, tedy tři obarvené stěny mají společný vrchol; uvažujme např. horní, přední a boční stěnu.

Pokud jsou počty obarvených kostiček v jednotlivých případech různé, musela děvčata obarvit kostky různými způsoby. U každého způsobu obarvení zjistíme, kolik kostiček má obarvenou aspoň jednu stěnu. Budeme postupovat po vrstvách, vrstvy počítáme zdola:

1. V první a páté vrstvě má aspoň jednu stěnu obarveno všech 25 kostiček, ve druhé, třetí a čtvrté vrstvě je obarveno vždy 5 kostiček; celkem je v tomto případě obarveno $25 + 5 + 5 + 5 + 25 = 65$ kostiček.
2. V prvních čtyřech vrstvách má aspoň jednu stěnu obarveno vždy 9 kostiček, v páté vrstvě je obarveno všech 25 kostiček; celkem je v tomto případě obarveno $9 + 9 + 9 + 9 + 25 = 61$ kostiček.

Hledaný rozdíl počtů obarvených kostiček je $65 - 61 = 4$.

Hodnocení. 1 bod za určení možných způsobů obarvení; 4 body za určení počtu obarvených kostiček v jednotlivých případech; 1 bod za rozdíl.

Poznámka. Rozdíl lze zjistit i bez určení celkových počtů obarvených kostiček v jednotlivých případech. Při takovémto řešení hodnotte druhou část úlohy 1 až 5 body podle kvality zdůvodnění (první bod je stejný).

Z6–II–2

Jirka sbírá podpisy známých sportovců a zpěváků. Má k tomu zvláštní sešit a určil, že podpisy budou na každém listu vždy jen na jeho přední straně. Všechny tyto stránky očísloval 1, 3, 5, 7, 9, ..., aby poznal, kdyby se mu nějaký list ztratil. Napsal tak celkem 125 číslic.

- Kolik měl jeho sešit listů?
- Kolik napsal celkem jedniček?

(M. Volfová)

Možné řešení. Jednomístných lichých čísel je pět. Dvojmístných čísel je celkem $99 - 9 = 90$, z toho je lichých 45. S těmito čísly mohl Jirka očíslovat $5 + 45 = 50$ stran a použil by při tom $5 + 2 \cdot 45 = 95$ číslic. Zbývá ještě použít $125 - 95 = 30$ číslic. Tyto přesně odpovídají prvním deseti trojmístným lichým číslům od 101 do 119. Jirka celkem očísloval $5 + 45 + 10 = 60$ stran, sešit má tedy 60 listů.

Číslice 1 je na místě jednotek celkem dvanáctkrát (jednou v každé desítce: 1, 11, ..., 91, 101, 111). Na místě desítek se číslice 1 vyskytuje desetkrát (pětkrát mezi čísly 11 a 19 a pětkrát mezi 111 a 119). Na místě stovek je číslice 1 také desetkrát (trojmístných čísel bylo napsáno právě deset). Jirka napsal celkem $12 + 10 + 10 = 32$ jedniček.

Hodnocení. Po 3 bodech za každou část úlohy. (Úlohu lze řešit i postupným vypisováním a počítáním číslic.)

Z6–II–3

Na noční pochod dostaly družiny Vlků a Lišek po jedné stejné svíčke. Svíčky společně zapálili na startu a vyrazili. Každý člen družiny nesl svíčku takovou dobu, za kterou se její délka zkrátila na polovinu. Vlci doběhli do cíle v momentě, kdy šestý nositel předával svíčku sedmému. Poté jejich svíčka hořela ještě tři minuty. Lišky doběhly do cíle za dvě hodiny a 57 minut.

- Která družina byla v cíli první?
- O kolik minut doběhla vítězná družina do cíle dříve než druhá družina?

(Svíčka odhořívá rovnoměrně: za stejný čas vždy stejný kousek.) (M. Dillingerová)

Možné řešení. Nejdříve zjistíme, jak dlouho běželi Vlci. Šestý nositel předával svíčku sedmému v okamžiku, kdy měla hořet ještě 3 minuty. Sám ji tedy nesl rovněž 3 minuty a od pátého nositele ji přebíral v okamžiku, kdy měla hořet $3 + 3 = 6$ minut. Pátý nositel ji tedy nesl rovněž 6 minut a od čtvrtého nositele ji přebíral v okamžiku, kdy měla hořet $6 + 6 = 12$ minut. Takto můžeme postupovat až k prvnímu nositeli:

| nositel č. | nesl svíčku (min) |
|------------|-------------------|
| 7 | 0 |
| 6 | 3 |
| 5 | 6 |
| 4 | 12 |
| 3 | 24 |
| 2 | 48 |
| 1 | 96 |

Pochod Vlkům trval $96 + 48 + 24 + 12 + 6 + 3 = 189$ minut. (Alternativně lze spočítat jako $96 + 96 - 3 = 189$.)

Liškám pochod trval $120 + 57 = 177$ minut.

Lišky tedy byly v cíli první, a to o $189 - 177 = 12$ minut.

Hodnocení. 1 bod za postřeh, že každý nositel nesl svíčku tak dlouho, jak dlouho měla hořet, když ji předával dalšímu; 2 body za vyplněnou tabulku nebo její obdobu; 1 bod za určení doby pochodu Vlků; po 1 bodu za odpověď na každou otázku ze zadání.

Řešení, v němž je pouze nezdůvodněný závěr, že v cíli byly první Lišky, neuděluje žádný bod.