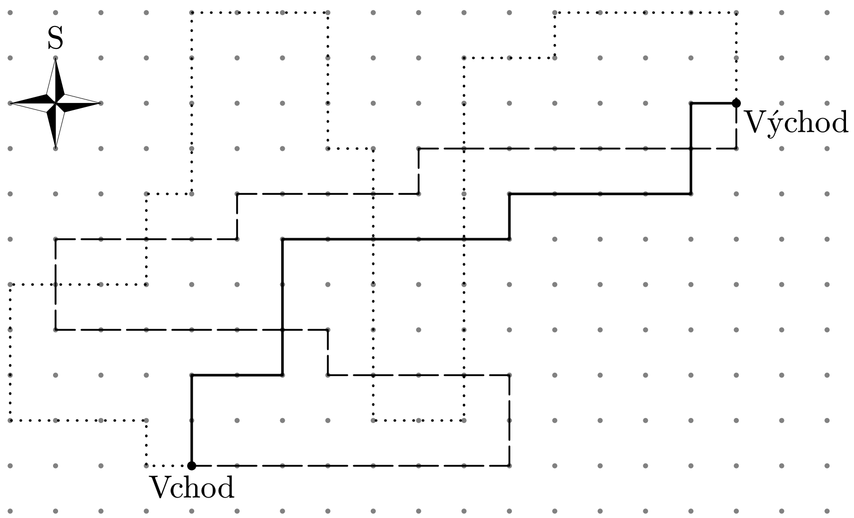
61. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Tři kamarádi Pankrác, Servác a Bonifác šli o prázdninách na noční procházku přírodním labyrintem. U vstupu dostal každý svíčku a vydali se různými směry. Všichni labyrintem úspěšně prošli, ale každý šel jinou cestou. V následující čtvercové síti jsou vyznačeny jejich cesty. Víme, že Pankrác nikdy nešel na jih a že Servác nikdy nešel na západ. Kolik metrů ušel v labyrintu Bonifác, když Pankrác ušel přesně 500 m? (*M. Petrová*)



Nápad. Kterou cestou Bonifác určitě nešel?

Možné řešení. Nejdříve určíme, kterými cestami šli jednotliví kamarádi. K tomu potřebujeme vědět, na které světové strany vedou jednotlivé cesty. Cesta podle plné čáry vede pouze na sever a na východ. Čárkovaná cesta vede na sever, východ a západ. Tečkovaná cesta míří postupně na všechny světové strany. Jediná cesta, která nevede nikdy západním směrem, je ta vyznačená plnou čárou — patří tedy Servácovi. Tudy Bonifác jistě nešel. Ze zbylých dvou cest na jih nemíří ta čárkovaná — po ní tedy šel Pankrác. Takže Bonifác musel jít po tečkované čáře.

Pankrác ušel 500 m. Nyní spočítáme, po kolika úsečkách (tj. stranách čtverečku čtvercové sítě) šel:

$$7(\text{východ}) + 2(\text{sever}) + 4(\text{západ}) + 1(\text{sever}) + 6(\text{západ}) + 2(\text{sever}) +$$
$$+4(\text{východ}) + 1(\text{sever}) + 4(\text{východ}) + 1(\text{sever}) + 7(\text{východ}) + 1(\text{sever}) = 40.$$

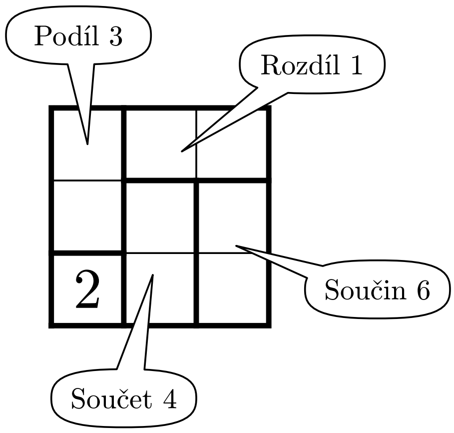
Teď ještě určíme, po kolika úsečkách šel Bonifác:

$$1(\text{západ}) + 1(\text{sever}) + 3(\text{západ}) + 3(\text{sever}) + 3(\text{východ}) + 2(\text{sever}) +$$
$$+1(\text{východ}) + 4(\text{sever}) + 3(\text{východ}) + 3(\text{jih}) + 1(\text{východ}) + 6(\text{jih}) +$$
$$+2(\text{východ}) + 8(\text{sever}) + 2(\text{východ}) + 1(\text{sever}) + 4(\text{východ}) + 2(\text{jih}) = 50.$$

Jestliže 40 úseček měří 500 m, pak 10 úseček měří $500 : 4 = 125$ (m). Takže 50 úseček měří $500 + 125 = 625$ (m). Bonifác ušel v labyrintu 625 metrů.

Z5–I–2

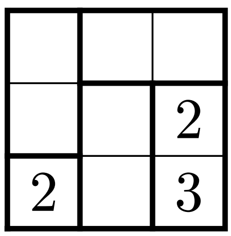
Do každého nevyplněného čtverečku doplňte číslo 1, 2, nebo 3 tak, aby v každém sloupci a řádku bylo každé z těchto čísel právě jednou a aby byly splněny dodatečné požadavky v každé vyznačené oblasti.



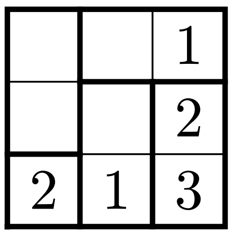
(Požadujeme-li ve vyznačené oblasti určitý podíl, máme na mysli podíl, který získáme vydělením většího čísla menším. Podobně pracujeme i s rozdílem.) (*S. Bednářová*)

Nápad. Začněte součinem.

Možné řešení. Začneme součinem: Z čísel 1, 2 a 3 potřebujeme vybrat dvě taková, aby jejich součin byl 6. V úvahu připadá jediná možnost — 2 a 3. Protože ve třetím řádku již dvojka je, můžeme do příslušného políčka tohoto řádku dopsat pouze trojku.



Nyní je zřejmé, že v prvním políčku třetího sloupce a ve druhém políčku třetího řádku mohou být jen jedničky.



Nyní např. součet: Součet dvou čísel má být 4, jeden ze sčítanců je 1, takže druhý musí být 3.

		1
	3	2
2	1	3

Nyní rozdíl: Rozdíl dvou čísel má být 1, jedním z těchto čísel je 1, takže druhé musí být 2.

	2	1
	3	2
2	1	3

Zbývá doplnit poslední čísla: V prvním řádku chybí číslo 3, ve druhém řádku chybí číslo 1. Ještě ověříme, že podíl právě doplněných čísel je opravdu 3 a že v každém sloupci a řádku je každé z čísel 1, 2 a 3 právě jednou.

3	2	1
1	3	2
2	1	3

Poznámka. Samozřejmě lze postupovat mnoha různými způsoby, v každém případě si však rychle všimnete, že v zadání je podstatně víc informací, než je potřeba k jednoznačnému dořešení úlohy. Pokud se např. přednostně soustředíte na požadavek, aby v každém sloupci a řádku bylo každé z čísel 1, 2, 3 právě jednou, pak stačí už jen jedna ze čtyř dále zmíněných informací — poznáte která? Současně některé dodatečné informace jsou splněny vždy — poznáte které?

Z5–I–3

Jolana připravuje pro své kamarádky občerstvení — chlebíčky. Namaže je bramborovým salátem a navrch chce dát ještě další přísady: šunku, tvrdý sýr, plátek vajíčka a proužek nakládané papričky. Jenže nechce, aby některé dva její chlebíčky obsahovaly úplně stejnou kombinaci přísad. Jaký největší počet navzájem různých chlebíčků může vytvořit, jestliže žádný z nich nemá mít všechny čtyři přísady a žádný z nich není pouze se salátem (tj. bez dalších přísad)? (*M. Petrová*)

Nápad. Vymyslete vhodný systém, podle kterého budete jednotlivé možnosti vypisovat.

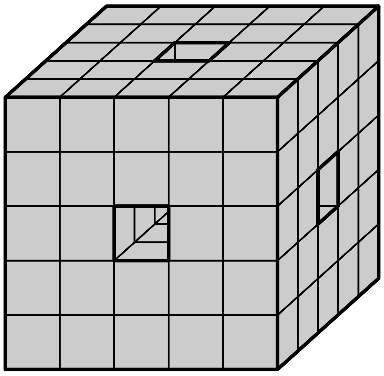
Možné řešení. Pro přehlednost sestavíme tabulku. Hvězdička znamená, že daný chlebíček obsahuje příslušnou přísadu, prázdné políčko pak znamená, že chlebíček tuto přísadu neobsahuje.

	šunka	sýr	vajíčko	paprička	
1 přísada	*				1
		*			2
			*		3
				*	4
2 přísady	*	*			5
	*		*		6
	*			*	7
		*	*		8
		*		*	9
			*	*	10
3 přísady	*	*	*		11
	*	*		*	12
	*		*	*	13
		*	*	*	14

Protože jsme tabulku tvořili systematicky a vyčerpali jsme všechny možnosti, vidíme, že Jolana může připravit až 14 chlebíčků tak, aby byly splněny její požadavky.

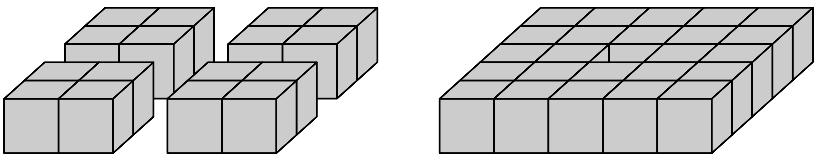
Z5–I–4

Na obrázku je stavba slepená ze stejných kostiček. Jedná se o krychli s několika dírami, kterými je vidět skrz a které mají všude stejný průřez. Z kolika kostiček je stavba slepena? (*M. Krejčová*)



Nápad. Zkuste počítat po vrstvách.

Možné řešení. Stavbu rozdělíme čtyřmi vodorovnými řezy na pět vrstev. Prostřední vrstva je na obrázku vlevo, skládá se z 16 kostiček. Ostatní čtyři vrstvy vypadají všechny tak, jak ukazuje obrázek vpravo, a každá z nich se skládá z 24 kostiček. Na celou stavbu bylo použito $16 + 4 \cdot 24 = 112$ kostiček.



Jiný nápad. Kolik kostiček chybí v tunelech?

Jiné řešení. Představme si, že stavba byla zhotovena bez „tunelů“ a ty byly proraženy až dodatečně. Původně se tedy skládala z $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ kostiček. Proražením prvního tunelu stavba ztratila 5 kostiček, proražením dalších dvou tunelů ztratila po 4 kostičkách. Konečný počet kostiček tedy je $125 - 5 - 4 - 4 = 112$.

Z5–I–5

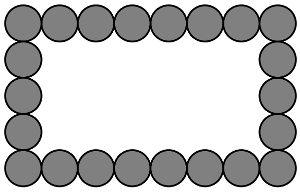
V pohádce o sedmero krkavcích bylo sedm bratrů, z nichž každý se narodil přesně rok a půl po předchozím. Když byl nejstarší z bratrů právě čtyřikrát starší než nejmladší, matka všechny zaklela. Kolik let bylo sedmero bratrům krkavcům, když je jejich matka zaklela? (*M. Volfová*)

Nápad. Jaký byl věkový rozdíl nejmladšího a nejstaršího bratra?

Možné řešení. Nejstaršího bratra dělilo od nejmladšího 9 let ($6 \cdot 1{,}5 = 9$). Nejstarší bratr byl čtyřikrát starší než nejmladší, takže těchto 9 let muselo odpovídat trojnásobku věku nejmladšího bratra. V době zakletí tedy byly nejmladšímu 3 roky ($9 : 3 = 3$). Dalším bratrům bylo postupně 4 a půl, 6, 7 a půl, 9, 10 a půl, 12 let.

Z5–I–6

Janka a Hanka si rády hrají s modely zvířátek. Hanka pro své kravičky sestavila z uzávěrů od PET lahví obdélníkovou ohrádku jako na obrázku. Janka ze všech svých uzávěrů složila pro ovečky ohrádku tvaru rovnostranného trojúhelníku. Poté ji rozebrala a postavila pro ně ohradu čtvercovou, rovněž ze všech svých uzávěrů. Kolik mohla mít Janka uzávěrů? Najděte aspoň 2 řešení. (*M. Volfová*)



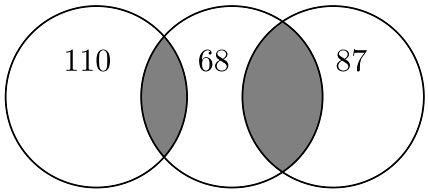
Nápad. Mohla by Janka mít např. 6 nebo 8 uzávěrů?

Možné řešení. To, že Janka složila ohrádku tvaru rovnostranného trojúhelníku, znamená, že počet jejích uzávěrů musel být násobkem čísla 3. Podobně, čtvercovou ohrádku mohla postavit pouze, když počet uzávěrů byl násobkem čísla 4. Počet uzávěrů tedy musel být současně násobkem čísla 3 i 4, tj. např. 12, 24, 36, … (libovolný násobek 12).

I. kolo kategorie Z6

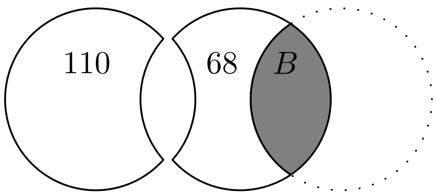
Z6–I–1

Na obrázku jsou tři stejně velké kruhy. Společné části sousedních kruhů jsme šedě vybarvili. Bílé části mají v obrázku zapsány své obsahy, a to v centimetrech čtverečních. Vypočítejte obsahy obou šedých částí. (*L. Šimůnek*)

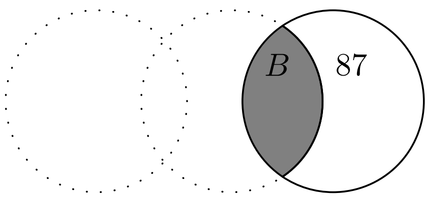


Nápad. Obsah celého kruhu se hodí, ale nesnažte se jej určovat hned na začátku.

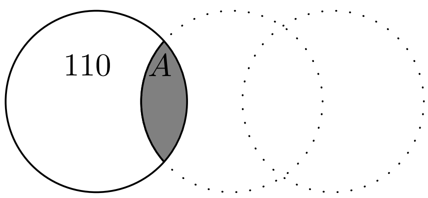
Možné řešení. Společnou část prvních dvou kruhů nazveme A, společnou část druhého a třetího kruhu nazveme B. Z druhého kruhu zůstane po odtržení části A zbytek, který musí mít stejný obsah jako část, která zbude po odtržení části A z kruhu prvního. V zadání se uvádí, že tato zbylá část má obsah 110, a díky tomu spočítáme obsah části B: $110 - 68 = 42$.



Nyní známe obsah třetího kruhu: $42 + 87 = 129$.



Stejný obsah mají i ostatní kruhy, s pomocí prvního určíme obsah části A: $129 - 110 = 19$.



Šedé plochy mají obsahy popořadě zleva $19\,\mathrm{cm}^2$ a $42\,\mathrm{cm}^2$.

Z6–I–2

Do hračkářství přivezli nová plyšová zvířátka: vážky, pštrosy a kraby. Každá vážka má 6 nohou a 4 křídla, každý pštros má 2 nohy a 2 křídla a každý krab má 8 nohou a 2 klepeta. Dohromady mají tyto přivezené hračky 118 nohou, 22 křídel a 22 klepet. Kolik mají dohromady hlav? (*M. Petrová*)

Nápad. Využijte toho, že ze zmíněných zvířátek mají klepeta pouze krabi.

Možné řešení. Pro přehlednost si údaje o jednotlivých hračkách zaznamenáme do tabulky:

	nohy	křídla	klepeta	hlavy
vážka	6	4	0	1
pštros	2	2	0	1
krab	8	0	2	1

Je zřejmé, že klepeta mají pouze krabi. Protože všech klepet je 22 a každý krab má klepeta dvě, musí být krabů $22 : 2 = 11$. Tito krabi mají dohromady $11 \cdot 8 = 88$ nohou. Na vážky a pštrosy tak zbývá $118 - 88 = 30$ nohou.

Vážky a pštrosi tak mají dohromady 30 nohou a 22 křídel. Abychom určili počty jednotlivých hraček, všimneme si následujícího:

	nohy	křídla
jedna vážka	6	4
jeden pštros	2	2
dva pštrosi	4	4

Vidíme, že dva pštrosi mají dohromady stejně křídel jako jedna vážka, ale mají o 2 nohy méně. Můžeme si to představit tak, že ze dvou pštrosů „vyrobíme" jednu vážku tak, že jim „přidáme" ještě dvě nohy.

Podle křídel máme 11 pštrosů ($22 : 2 = 11$). Ti by ale měli jen 22 nohou ($11 \cdot 2 = 22$). Zbývá nám tedy 8 nohou ($30 - 22 = 8$), kterými budeme „předělávat pštrosy na vážky". Vždy dvě nohy promění dva pštrosy v jednu vážku, vážky jsou proto $8 : 2 = 4$.

Čtyři vážky mají dohromady 24 nohou ($4 \cdot 6 = 24$) a 16 křídel ($4 \cdot 4 = 16$). Na pštrosy tak zbývá 6 nohou ($30 - 24 = 6$) a 6 křídel ($22 - 16 = 6$). Jsou tedy celkem 3 ($6 : 2 = 3$). Předchozí úvahy můžeme schematicky znázornit následovně (symbol ìí představuje dvě křídla a dvě nohy, tedy určující prvky jednoho pštrosa):

$$\text{ìí} \quad \text{ìí} \quad \text{ìí} \quad \underbrace{\text{ìí} \qquad \text{ìí}}_{\text{ıı}} \quad \underbrace{\text{ìí} \qquad \text{ìí}}_{\text{ıı}} \quad \underbrace{\text{ìí} \qquad \text{ìí}}_{\text{ıı}} \quad \underbrace{\text{ìí} \qquad \text{ìí}}_{\text{ıı}}$$

Do hračkářství přivezli 11 krabů, 4 vážky a 3 pštrosy. Protože každé z těchto zvířat má jednu hlavu, dohromady mají 18 hlav $(11 + 4 + 3 = 18)$.

Jiné řešení. Stejně jako u předchozího řešení určíme, že přivezli 11 krabů a že vážky a pštrosi mají dohromady 30 nohou a 22 křídel.

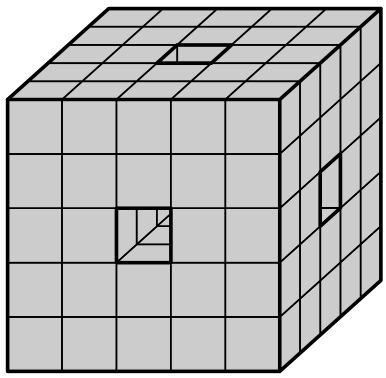
Jelikož vážky mají po 6 nohách, může jich být nejvýše 5 a jednotlivé možnosti postupně probereme. Kdyby vážka byla jedna, zbývalo by na pštrosy $30-6 = 24$ nohou a $22-4 = 18$ křídel. Aby souhlasily počty nohou, muselo by být pštrosů 12, ale aby souhlasily počty křídel, muselo by jich být 9 — jedna vážka proto být nemůže.

Ostatní případy rozepisovat nebudeme, diskuzi shrneme následující tabulkou a závěr je stejný jako výše.

vážek	zbyde nohou	zbyde křídel	pštrosů
1	24	18	—
2	18	14	—
3	12	10	—
4	6	6	**3**
5	0	2	—

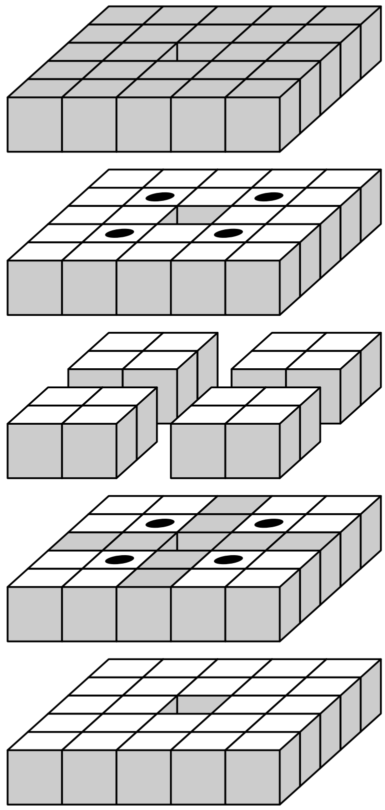
Z6–I–3

Na obrázku je stavba slepená ze stejných kostiček. Jedná se o krychli s několika dírami, kterými je vidět skrz a které mají všude stejný průřez. Hotovou stavbu jsme celou ponořili do barvy. Kolik kostiček má obarvenu aspoň jednu stěnu? (*M. Krejčová*)



Nápad. Zjistěte, kolik kostiček nemá obarvenu ani jednu stěnu.

Možné řešení. Stavbu rozdělíme čtyřmi vodorovnými řezy na pět vrstev tak, jak ukazuje následující obrázek. Prostřední vrstva se skládá z 16 kostiček, ostatní vždy z 24 kostiček. Celkový počet kostiček je $16+4\cdot 24 = 112$. Kostičky, které nemají obarvenu ani jednu stěnu, jsme v obrázku označili černým puntíkem — je jich 8. Ostatní kostičky mají obarvenu aspoň jednu stěnu a je jich tedy $112 - 8 = 104$.



Jiný nápad. Počítejte přímo po vrstvách.

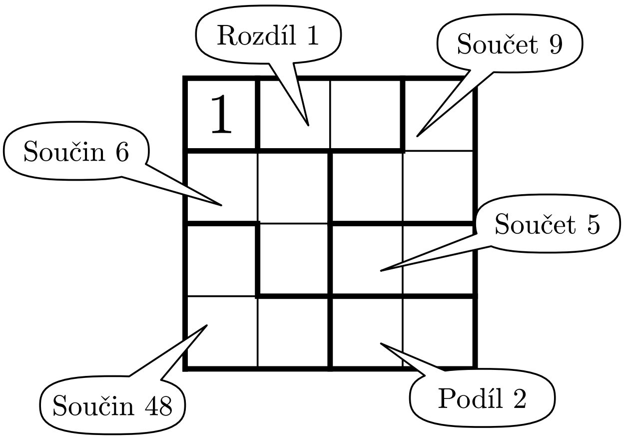
Jiné řešení. Pracujeme s výše uvedeným obrázkem. Ve spodní vrstvě mají všechny kostičky, kterých je 24, obarveny aspoň jednu stěnu. Ve druhé vrstvě je 8 kostiček s jednou obarvenou stěnou a 12 se dvěma obarvenými stěnami. V prostřední vrstvě je všech 16 kostiček se dvěma obarvenými stěnami. Čtvrtá vrstva se shoduje s druhou a pátá s první. Kostiček, které mají obarvenu aspoň jednu stěnu, jsme celkově napočítali

$$2 \cdot 24 + 2 \cdot (8 + 12) + 16 = 48 + 40 + 16 = 104.$$

Z6–I–4

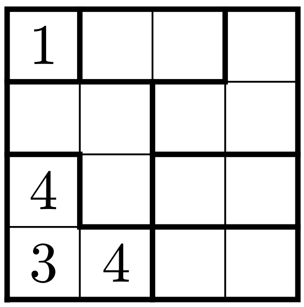
Do každého nevyplněného čtverečku doplňte číslo 1, 2, 3, nebo 4 tak, aby v každém sloupci a řádku bylo každé z těchto čísel právě jednou a aby byly splněny dodatečné požadavky v každé vyznačené oblasti.

(Požadujeme-li ve vyznačené oblasti určitý podíl, máme na mysli podíl, který získáme vydělením většího čísla menším. Podobně pracujeme i s rozdílem.) (*S. Bednářová*)

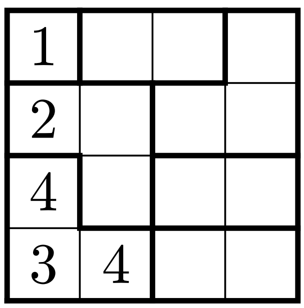


Nápad. Začněte součinem 48.

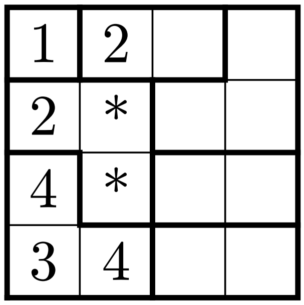
Možné řešení. Začneme součinem 48: Potřebujeme rozložit číslo 48 na součin tří čísel tak, aby činitelé byli pouze 1, 2, 3 nebo 4. To lze jediným způsobem, $48 = 3 \cdot 4 \cdot 4$, a činitelé mohou být v odpovídající oblasti doplněni jedině takto:



Do druhého políčka prvního sloupce doplníme číslo 2, které v tomto sloupci chybí.

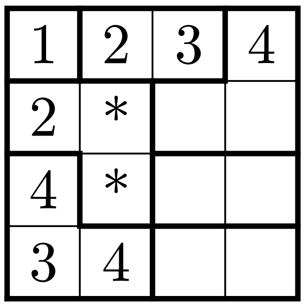


Nyní se budeme zabývat součinem 6, který lze získat z daných čísel jen jako $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$. To znamená, že ve druhém sloupci budou, kromě již napsaného čísla 4, ještě čísla 1 a 3 (zatím nevíme, v jakém pořadí). Takže v prvním políčku druhého sloupce musí být číslo 2.

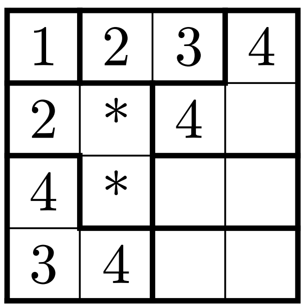


Rozdíl 1: Rozdíl dvou čísel má být 1, jedno z čísel je 2, takže druhé číslo musí být 1 nebo 3. Protože číslo 1 je již v prvním řádku napsáno, musí být ve třetím políčku tohoto řádku číslo 3.

Do čtvrtého políčka prvního řádku tak musíme doplnit číslo 4, které jediné v tomto řádku ještě není.



Uvažujme tentokrát jinak. Zatím jsme doplnili třikrát číslo 4, takže ještě jedno zbývá. Protože v prvním, třetím a čtvrtém řádku čtyřky zastoupeny jsou, bude to poslední ve druhém řádku. Stejně tak je čtyřka doplněna v prvním, druhém a čtvrtém sloupci, takže chybí ve třetím sloupci. To znamená, že poslední, čtvrté, číslo 4 musí být ve druhém řádku třetího sloupce.



Součet 9: V této oblasti chybí poslední číslo, a to musí být $9 - 4 - 4 = 1$.

1	2	3	4
2	*	4	1
4	*		
3	4		

Ve druhém políčku druhého řádku musí být číslo 3, které zde jako jediné ještě není. To znamená, že ve třetím políčku druhého sloupce bude číslo 1 (buď proto, že v tomto sloupci chybí, nebo proto, že chybí v oblasti se součinem 6).

1	2	3	4
2	3	4	1
4	1		
3	4		

Nyní můžeme uvažovat stejně jako při doplňování posledního čísla 4. Doplnili jsme třikrát číslo 1, které zatím není ve čtvrtém řádku a ve třetím sloupci. Stejně tak doplníme i poslední číslo 3, které chybí pouze ve třetím řádku a ve čtvrtém sloupci.

1	2	3	4
2	3	4	1
4	1		3
3	4	1	

Nyní už chybí jen dvě čísla 2. Snadno ověříme, že po jejich doplnění do prázdných políček splňují všechna zapsaná čísla všechny požadované podmínky.

1	2	3	4
2	3	4	1
4	1	2	3
3	4	1	2

Poznámka. Samozřejmě lze postupovat mnoha různými způsoby, v každém případě si však rychle všimnete, že v zadání je podstatně víc informací, než je potřeba k jednoznačnému dořešení úlohy. Pokud se např. přednostně soustředíte na požadavek, aby v každém sloupci a řádku bylo každé z čísel 1, 2, 3, 4 právě jednou, pak stačí už jen tři ze šesti dále zmíněných informací — které tři by kupříkladu stačily?

Z6–I–5

Ondra, Matěj a Kuba dostali k Vánocům od prarodičů každý jednu z následujících hraček: velké hasičské auto, vrtulník na dálkové ovládání a stavebnici Merkur. Bratranec Petr doma vyprávěl:

„Ondra dostal to velké hasičské auto. Přál si ho sice Kuba, ale ten ho nedostal. Matěj nemá v oblibě stavebnice, takže Merkur nebyl pro něj.“

Ukázalo se, že ve sdělení, jaký dárek kdo dostal či nedostal, se Petr dvakrát mýlil a jen jednou vypovídal správně. Jak to tedy s dárky bylo? (*M. Volfová*)

Nápad. Nejdřív zjistěte, kdo dostal hasičské auto.

Možné řešení. Petrovy výpovědi o chlapcích jsou:

1. Ondra dostal hasičské auto,
2. Kuba nedostal hasičské auto,
3. Matěj nedostal Merkur.

Kdyby hasičské auto dostal Ondra, byly by první dvě výpovědi pravdivé. Ale pravdivé má být jen jedno sdělení, takže hasičské auto Ondra dostat nemohl.

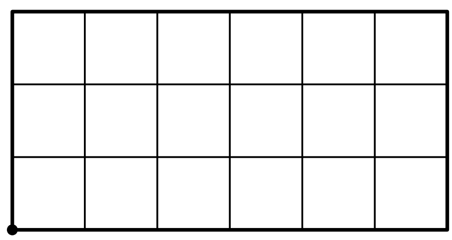
Kdyby hasičské auto dostal Matěj, byly by opět dvě výpovědi pravdivé, totiž druhá a třetí, a to nelze.

Hasičské auto tedy musel dostat Kuba. První i druhé tvrzení je proto nepravdivé a pravdivé musí být třetí, že Matěj nedostal Merkur. Matěj nedostal ani hasičské auto (to dostal Kuba), takže musel dostat vrtulník.

Dárky byly rozděleny takto: Kuba dostal hasičské auto, Matěj vrtulník a Ondra Merkur.

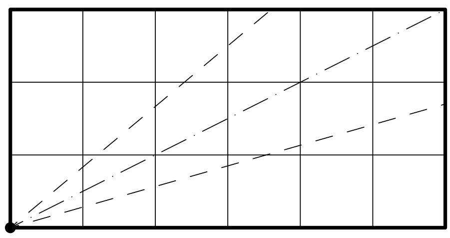
Z6–I–6

Marta, Libuše a Marie si vymyslely hru, kterou chtějí hrát na obdélníkovém hřišti složeném z 18 stejných čtverců (obrázek). Ke hře potřebují hřiště rozdělit dvěma rovnými čárami na tři stejně velké části. Navíc tyto čáry musejí obě procházet tím rohem hřiště, který je na obrázku vlevo dole. Poraďte děvčatům, jak mají dokreslit čáry, aby si mohla začít hrát. (*E. Trojáková*)



Nápad. Dvě ze tří částí musejí být trojúhelníky.

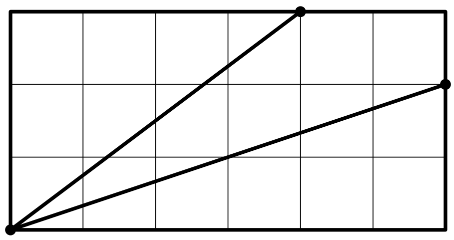
Možné řešení. Hřiště složené z 18 stejných čtverců je třeba rozdělit na tři stejně velké části. Velikost jedné části potom bude $18 : 3 = 6$ čtverců. Úhlopříčka dělí hřiště na dva stejné trojúhelníky s obsahem $18 : 2 = 9$ čtverců. To znamená, že pokud máme dostat tři části s obsahem 6 čtverců, musí být jedna z dělicích čar „pod" a druhá „nad" touto úhlopříčkou, viz obrázek. Dvě z takto vzniklých částí tvoří trojúhelníky a jedna čtyřúhelník. Nyní stačí určit čáry tak, aby trojúhelníky měly obsah 6 čtverců. Zbylý čtyřúhelník potom bude mít tentýž obsah.



Podívejme se nejprve na trojúhelník vlevo. Tento trojúhelník je polovinou obdélníku, jehož svislá strana je dlouhá 3 dílky. Obsah tohoto obdélníku má být $2 \cdot 6 = 12$ čtverců, takže jeho druhá strana musí být dlouhá $12 : 3 = 4$ dílky — můžeme nakreslit první dělicí čáru.

Postupujme podobně i u druhého trojúhelníku. Tento trojúhelník je polovinou obdélníku s obsahem 12 čtverců, jehož vodorovná strana je dlouhá 6 dílků. Jeho svislá strana musí být $12 : 6 = 2$ dílky dlouhá — můžeme nakreslit druhou dělicí čáru.

Děvčata by měla rozdělit hřiště jako na následujícím obrázku.



I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Trpaslíci si chodí k potoku pro vodu. Džbánek každého z trpaslíků je jinak velký: mají objemy 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 litrů. Trpaslíci si džbánky mezi sebou nepůjčují a vždy je přinesou plné vody.

- Kejchal přinese ve svém džbánku víc vody než Štístko.
- Dřímal by musel jít pro vodu třikrát, aby přinesl právě tolik vody jako Stydlín v jednom svém džbánku.
- Prófův džbánek je jen o 2 litry větší než Štístkův.
- Sám Šmudla přinese tolik vody jako Dřímal a Štístko dohromady.
- Když jdou pro vodu Prófa a Šmudla, přinesou stejně vody jako Rejpal, Kejchal a Štístko.

Kolik vody přinesou dohromady Kejchal a Šmudla? (*M. Petrová*)

Nápad. Začněte druhou podmínkou.

Možné řešení. Z druhé podmínky plyne, že Dřímalův džbánek má objem 3 litry a Stydlínův 9 litrů (platí $3 \cdot 3 = 9$, a kdyby měl Dřímal džbánek jiný, musel by být Stydlínův džbánek aspoň dvanáctilitrový).

Nyní ze čtvrté podmínky plyne, že Šmudlův džbánek je o 3 litry větší než Štístkův. Společně s třetí podmínkou tak víme, že Štístko, Prófa a Šmudla mají postupně džbánky s objemy buď 4, 6 a 7, nebo 5, 7 a 8 litrů.

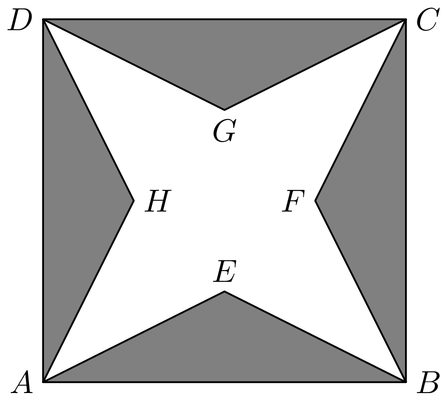
Z první podmínky potom plyne, že jediné možnosti, jak měli trpaslíci džbánky rozděleny, jsou:

3	4	5	6	7	8	9
Dřímal	Štístko	Kejchal	Prófa	Šmudla	Rejpal	Stydlín
Dřímal	Štístko	Rejpal	Prófa	Šmudla	Kejchal	Stydlín
Dřímal	Rejpal	Štístko	Kejchal	Prófa	Šmudla	Stydlín

Ověříme-li poslední, pátou, podmínku, zjistíme, že první dvě vyznačené možnosti nevyhovují ($6 + 7 \neq 8 + 5 + 4$), zatímco třetí ano ($7 + 8 = 4 + 5 + 6$). Kejchal se Šmudlou tedy dohromady přinesou $6 + 8 = 14$ litrů vody.

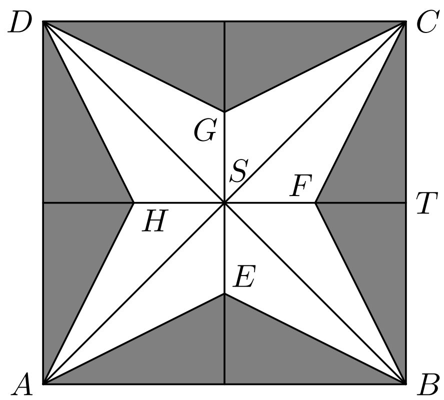
Z7–I–2

Na obrázku je čtverec $ABCD$, ve kterém jsou umístěny čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky ABE, BCF, CDG a DAH, všechny šedě vybarvené. Strany čtverce $ABCD$ jsou základnami těchto rovnoramenných trojúhelníků. Víme, že šedé plochy čtverce $ABCD$ mají dohromady stejný obsah jako jeho bílá plocha. Dále víme, že $|HF| = 12\,\mathrm{cm}$. Určete velikost strany čtverce $ABCD$. (*L. Šimůnek*)



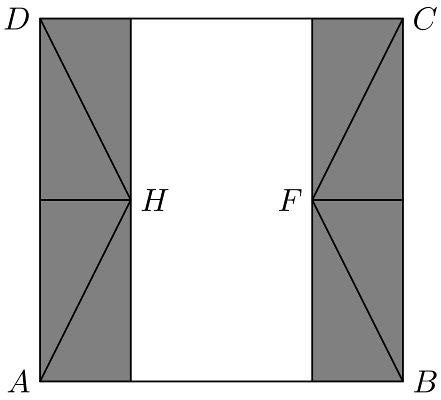
Nápad. Vhodně si obrazec rozdělte.

Možné řešení. Ve čtverci $ABCD$ vyznačíme obě úhlopříčky a spojnice středů protilehlých stran. Čtyři takto doplněné úsečky se protínají v jediném bodě S a rozdělují obrazec beze zbytku na osm shodných trojúhelníků. Jeden z nich jsme v obrázku označili STC.



Těchto osm trojúhelníků se shoduje i ve svých šedě vybarvených částech, a proto zadanou podmínku o obsazích můžeme užít pro každý tento trojúhelník zvlášť. V případě trojúhelníku STC proto platí, že jeho šedá a bílá plocha, tedy trojúhelníky FTC a SFC, mají stejný obsah. Oba trojúhelníky mají výšku TC. Aby měly stejný obsah, musejí být stejné i velikosti stran kolmých k této výšce, tedy $|FT| = |SF|$. Délka úsečky SF je poloviční vzhledem k délce uvedené v zadání, tudíž je $6\,\mathrm{cm}$. Velikost úsečky ST je pak $6 + 6 = 12\,(\mathrm{cm})$ a velikost strany čtverce $ABCD$ je $2 \cdot 12 = 24\,(\mathrm{cm})$.

Jiné řešení. Ve všech šedých rovnoramenných trojúhelnících vyznačíme výšku kolmou k základně. Tím rozdělíme původní trojúhelníky na osm shodných pravoúhlých trojúhelníků, které uvnitř čtverce $ABCD$ přemístíme tak, jak ukazuje obrázek.



Ve čtverci $ABCD$ jsme dostali dva shodné šedé obdélníky a jeden obdélník bílý. Strany těchto tří obdélníků, které jsou na obrázku svislé, mají stejnou délku. Velikost strany bílého obdélníku, která je na obrázku vodorovně, je zadaných 12 cm. Aby šedé plochy a bílá plocha měly stejný obsah, musejí mít vodorovné strany obou šedých obdélníků dohromady délku také 12 cm. Velikost strany čtverce $ABCD$ je tedy 24 cm.

Z7–I–3

Sedm bezprostředně po sobě jdoucích celých čísel stálo v řadě, seřazeno od nejmenšího po největší. Po chvíli se čísla začala nudit, a tak se nejdřív první vyměnilo s posledním, potom se prostřední posunulo úplně na začátek řady a nakonec si největší z čísel stouplo doprostřed. Ke své veliké radosti se tak ocitlo vedle čísla se stejnou absolutní hodnotou. Kterých sedm čísel mohlo stát v řadě? (*S. Bednářová*)

Nápad. Zjistěte rozdíl zmíněných dvou čísel se stejnou absolutní hodnotou.

Možné řešení. Čísla označíme podle velikosti vzestupně jako 1. až 7. Jejich rozmístění se postupně měnilo takto:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
7.	2.	3.	4.	5.	6.	1.
4.	7.	2.	3.	5.	6.	1.
4.	2.	3.	7.	5.	6.	1.

Dvě čísla se stejnou absolutní hodnotou mohou být buď 3. a 7., nebo 7. a 5. Protože jde o dvojici různých čísel, musí být jedno kladné a druhé záporné. Kladné je větší z nich, tedy 7. číslo.

Nejprve uvažujme, že stejnou absolutní hodnotu mají 3. a 7. číslo. Jejich rozdíl je 4, větší z nich je tedy rovno $4 : 2 = 2$. Nejmenší číslo v řadě je o 6 menší než 7. číslo a je to tedy číslo $2 - 6 = -4$.

Nyní uvažujme, že stejnou absolutní hodnotu mají 7. a 5. číslo. Jejich rozdíl je 2, větší z nich je rovno $2 : 2 = 1$. Nejmenší číslo v řadě je pak $1 - 6 = -5$.

V řadě mohla stát celá čísla od -4 do 2 nebo od -5 do 1.

Z7–I–4

Učitelka Smolná připravovala prověrku pro svou třídu ve třech verzích, aby žáci nemohli opisovat. V každé verzi zadala tři hrany kvádru a dala za úkol vypočítat jeho objem. Úlohy si ale dopředu nevyřešila, a tak netušila, že výsledek je ve všech třech verzích stejný. Do zadání žákům zapsala tyto délky hran: $12, 18, 20, 24, 30, 33$ a 70, všechny v centimetrech. Z devíti délek hran, které učitelka Smolná zadala, jsme vám tedy prozradili pouze sedm a ani jsme nesdělili, které délky patří do téhož zadání. Určete zbylé dvě délky hran.

(*L. Šimůnek*)

Nápad. Rozložte si zadané délky na součin prvočísel.

Možné řešení. Rozložíme délky všech hran na součiny prvočísel:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3,\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3,\ 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5,$$
$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3,\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 33 = 3 \cdot 11,\ 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7.$$

V těchto součinech se nacházejí činitelé 7 a 11, tedy výsledný objem musí být násobkem čísla 77. Činitelé 7 a 11 jsou v zadaných délkách obsaženy každý pouze jednou, a to v hranách 33 a 70. Rozhodněme, zda tyto délky mohou patřit ke dvěma různým kvádrům.

Kdyby hrany 33 a 70 patřily k různým kvádrům, musel by kvádr s hranou 33 mít další hranu rovnu násobku sedmi, kvádr s hranou 70 by musel mít další hranu rovnu násobku jedenácti a poslední kvádr by musel mít mezi svými hranami násobek sedmi a násobek jedenácti. Právě jsme předpokládali existenci aspoň tří hran, které nejsou uvedeny v zadání, ale v něm přitom chybějí pouze dvě. Tím jsme ukázali, že hrany 33 a 70 patří ke stejnému kvádru. Nyní určíme třetí hranu tohoto kvádru.

Obě délky hran, které nejsou v zadání uvedeny, musejí být násobky čísla 77 a patřit ke zbylým kvádrům. Zbývající hranu našeho kvádru proto musíme hledat mezi zadanými hranami. Všimněme si hran 18 a 24. Podle první odvodíme, že výsledný objem je násobkem devíti (tj. $3 \cdot 3$), podle druhé jde zároveň o násobek osmi (tj. $2 \cdot 2 \cdot 2$). V součinech odpovídajících hranám 33 a 70 se nacházejí činitelé 2 a 3 každý pouze jednou. Třetí hrana uvažovaného kvádru proto musí mít ve svém rozkladu součin $2 \cdot 2 \cdot 3$. V zadání tak můžeme vybrat buď hranu 12, nebo 24.

Uvažujme nejprve o možnosti, že jeden z kvádrů má hrany 33, 70 a 12 a tedy že kvádry mají objem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Pro druhý kvádr vybereme hranu 24 a vidíme, že ten už nesmí mít v délce žádné další hrany činitel 2. V zadání však zbývají pouze délky s činitelem 2. Možnost s kvádrem o hranách 33, 70 a 12 proto musíme zavrhnout.

Nyní uvažujme o možnosti, že jeden z kvádrů má hrany 33, 70 a 24 a tedy že kvádry mají objem

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

Na hrany zbylých dvou kvádrů snadno přijdeme, pokud se držíme poznatku, že kvádr musí mít v délkách svých hran právě jednou činitel 5 a právě dvakrát činitel 3: druhý kvádr má hrany

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3,\ 154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$$

a hrany třetího kvádru jsou

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5,\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3,\ 154 = 2 \cdot 7 \cdot 11.$$

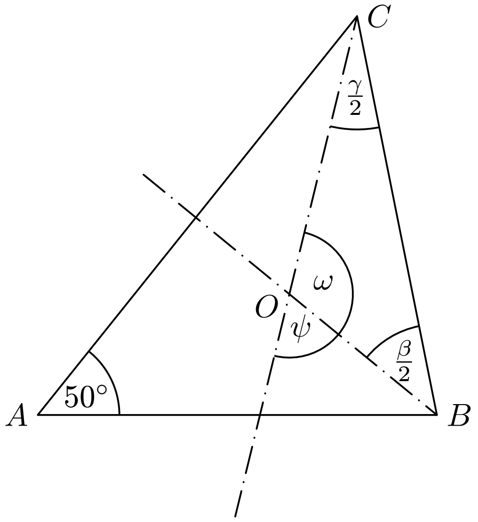
Délky zbylých dvou hran, které nejsou uvedeny v zadání, jsou shodně 154 cm.

Z7–I–5

Jeden vnitřní úhel v trojúhelníku měří 50°. Jak velký úhel svírají osy zbývajících dvou vnitřních úhlů? (*L. Hozová*)

Nápad. Nemusíte znát velikosti zbylých vnitřních úhlů, abyste úlohu dořešili.

Možné řešení. Uvažujme trojúhelník ABC s úhlem $50°$ u vrcholu A; neznámé úhly u vrcholů B a C označíme β a γ. Průsečík os vnitřních úhlů označíme O, úhel BOC označíme ω a úhel k němu vedlejší ψ.



Součet vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je 180°. Proto i v trojúhelnících ABC a OBC platí

$$50° + \beta + \gamma = 180°,$$
$$\omega + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180°.$$

Z druhé rovnosti a z toho, že ω a ψ jsou vedlejší úhly, plyne

$$\psi = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Z první rovnosti vyjádříme

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{130°}{2} = 65°,$$

tudíž odchylka os zbývajících dvou vnitřních úhlů je 65°.

Poznámka. Odpověď, že osy svírají úhel $\omega = 180° - 65° = 115°$, považujte také za správnou.

Z7–I–6

Hledáme šestimístný číselný kód, o němž víme, že:

- žádná číslice v něm není vícekrát,
- obsahuje i 0, ta však není na předposledním místě,
- ve svém zápisu nemá nikdy vedle sebe dvě liché ani dvě sudé číslice,
- sousední jednomístná čísla se liší aspoň o 3,
- čísla, která získáme přečtením prvního a druhého dvojčíslí, jsou obě násobkem čísla vzniklého přečtením třetího, tedy posledního dvojčíslí.

Určete hledaný kód. (*M. Volfová*)

Nápad. Zaměřte se na to, jak vypadají jednotlivá dvojčíslí, zvláště to poslední.

Možné řešení. Poslední číslice nemůže být 0 ani 5: kdyby tomu tak bylo, pak by podle páté podmínky první i druhé dvojčíslí končilo buď 0 nebo 5, takže číslice 0 nebo 5 by byla v kódu obsažena vícekrát, což odporuje podmínce první.

S tímto poznatkem spolu s ostatními podmínkami ze zadání začneme vypisovat všechna možná dvojčíslí, která se mohou vyskytovat na konci kódu. Navíc, aby byla splněna pátá a první podmínka, má smysl uvažovat pouze taková dvojčíslí, která mají alespoň dva různé násobky menší než 100. Všechny vyhovující možnosti jsou uvedeny v levém sloupci následující tabulky. Pravý sloupec pak obsahuje všechny jejich dvojmístné násobky, které případně mohou tvořit první a druhé dvojčíslí hledaného kódu.

14	28, 42, 56, 70, 84, 98
16	32, 48, 64, 80, 96
18	36, 54, 72, 90
27	54, 81
29	58, 87

Pokud vyřadíme všechna dvojčíslí, která nevyhovují třetí nebo čtvrté podmínce ze zadání, zůstává pouze:

14	70
16	96
18	36, 72, 90
27	81
29	58

Odtud je zřejmé, že poslední dvojčíslí musí být 18. Aby byla splněna druhá podmínka, musí být jedno ze zbylých dvojčíslí 90, a aby byla splněna čtvrtá podmínka, musí být 90 jako první. Ze stejného důvodu nemůže jako druhé dvojčíslí být 72, zbývá už jen 36. Výsledný kód tedy může být jedině 903618 a kontrolou všech podmínek ze zadání zjistíme, že tomu tak skutečně je.

Poznámka. Vedle úvodního poznatku, že 0 nemůže být poslední číslicí, lze využít i toho, že 0 nemůže být na prvním ani na třetím místě. (Jinak by první nebo druhé dvojčíslí představovalo jednomístné číslo, tudíž podle páté podmínky by i poslední dvojčíslí muselo být jednomístné číslo a na pátém místě by musela být zase 0, což nelze.) Proto je 0 buď na druhém, nebo čtvrtém místě. Ze třetí podmínky potom plyne, že sudé číslice mohou být jen na sudých a liché na lichých místech. Následující diskuze se tak poněkud zjednoduší.

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Korespondenční matematická soutěž probíhá ve třech kolech, jejichž náročnost se stupňuje. Do druhého kola postupují jen ti řešitelé, kteří byli úspěšní v prvním kole, do třetího kola postupují jen úspěšní řešitelé druhého kola. Vítězem je každý, kdo je úspěšným řešitelem posledního, tedy třetího kola. V posledním ročníku této soutěže bylo přesně 14 % řešitelů úspěšných v prvním kole, přesně 25 % řešitelů druhého kola postoupilo do třetího kola a přesně 8 % řešitelů třetího kola zvítězilo.

Jaký je nejmenší počet soutěžících, kteří se mohli zúčastnit prvního kola? Kolik by v takovém případě bylo vítězů? (*M. Petrová*)

Nápad. Všechny mezivýsledky musejí být přirozená čísla.

Možné řešení. Počet všech řešitelů prvního kola si označíme x. Počet úspěšných řešitelů prvního kola (a tedy počet všech řešitelů druhého kola) je 14 % z x, tedy $0{,}14x$. Počet úspěšných řešitelů druhého kola (a tedy počet všech řešitelů třetího kola) je 25 % z $0{,}14x$, tj. $0{,}25 \cdot 0{,}14x = 0{,}035x$. Počet úspěšných řešitelů třetího kola (a tedy i počet vítězů) je 8 % z $0{,}035x$, tj. $0{,}08 \cdot 0{,}035x = 0{,}0028x$.

Protože všechny výpočty jsou přesné (bez zaokrouhlování), musejí být čísla x, $0{,}14x$, $0{,}035x$ a $0{,}0028x$ přirozená. Začneme u posledního z nich:

$$0{,}0028x = \frac{28}{10\,000}\,x = \frac{7}{2\,500}\,x,$$

číslo x tedy musí být násobek čísla 2 500. Protože hledáme nejmenší řešení, budeme postupně zkoušet násobky 2 500, a to tak dlouho, než všechna zmiňovaná čísla budou přirozená:

x	$0{,}14x$	$0{,}035x$	$0{,}0028x$	závěr
2 500	350	87,5	7	nevyhovuje
5 000	700	175	14	vyhovuje

Nejmenší počet soutěžících, kteří se mohli zúčastnit prvního kola, je 5 000. Vítězů by v takovém případě bylo 14.

Jiné řešení. Počet všech řešitelů prvního kola označíme x. Počet úspěšných řešitelů prvního kola (a tedy počet všech řešitelů druhého kola) je 14 % z x, tedy

$$\frac{14}{100}\,x = \frac{7}{50}\,x.$$

Počet úspěšných řešitelů druhého kola (a tedy počet všech řešitelů třetího kola) je 25 % z předchozího počtu, tj.

$$\frac{25}{100} \cdot \frac{7}{50}\,x = \frac{7}{200}\,x.$$

Počet úspěšných řešitelů třetího kola (a tedy i počet vítězů) je 8 % z předchozího počtu, tj.

$$\frac{8}{100} \cdot \frac{7}{200}\,x = \frac{7}{2500}\,x.$$

Všechny výše uvedené výrazy musejí být přirozená čísla, číslo x tedy musí být společným násobkem čísel 50, 200 a 2 500. Protože nás zajímá nejmenší možný počet soutěžících v prvním kole soutěže, hledáme nejmenší společný násobek uvedených čísel, což je 5 000.

Nejmenší počet soutěžících v prvním kole je tedy 5 000 a počet vítězů by v tomto případě byl

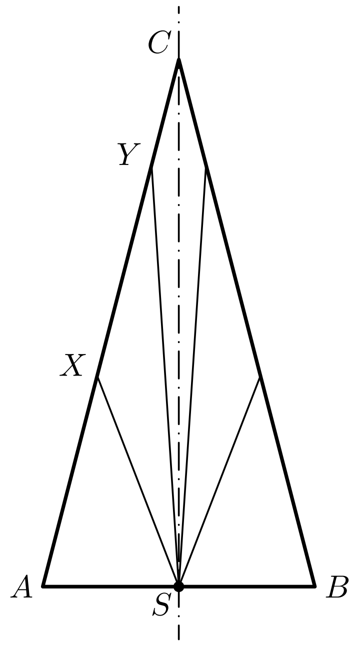
$$\frac{7}{2500} \cdot 5000 = 14.$$

Z8–I–2

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB dlouhou 10 cm a rameny dlouhými 20 cm. Bod S je střed základny AB. Rozdělte trojúhelník ABC čtyřmi přímkami procházejícími bodem S na pět částí se stejným obsahem. Zjistěte, jak dlouhé úsečky vytnou tyto přímky na ramenech trojúhelníku ABC. (*E. Trojáková*)

Nápad. Uvedená konstrukce je osově souměrná.

Možné řešení. Trojúhelník ABC je souměrný podle osy CS, proto i dělicí přímky musejí být osově souměrné podle stejné osy. Odpovídající části pak budou tvořit dvě dvojice osově souměrných trojúhelníků a jeden (osově souměrný) čtyřúhelník s vrcholem C. Označme průsečíky dvou dělicích přímek s jedním ramenem X a Y, viz obrázek.



Podle zadání mají být obsahy trojúhelníků ASX a XSY a dvojnásobek obsahu trojúhelníku YSC stejné. Tyto tři trojúhelníky však mají stejnou výšku ze společného vrcholu S, takže obsahy budou v uvedeném poměru právě tehdy, když pro protilehlé strany platí

$$|AX| = |XY| = 2|YC|.$$

Současně víme, že

$$|AC| = |AX| + |XY| + |YC| = 20\,\text{cm}.$$

Z uvedeného plyne, že $5|YC| = 20\,\text{cm}$, tj. $|YC| = 4\,\text{cm}$ a $|AX| = |XY| = 8\,\text{cm}$. Dělicí přímky vytínají na ramenech trojúhelníku úsečky dlouhé 4 a 8 cm.

Z8–I–3

Hledáme pětimístné číslo s následujícími vlastnostmi: je to palindrom (tj. čte se pozpátku stejně jako zepředu), je dělitelné dvanácti a ve svém zápisu obsahuje číslici 2 bezprostředně za číslicí 4. Určete všechna možná čísla, která vyhovují zadaným podmínkám. (*M. Mach*)

Nápad. Určete, jak mohou být umístěny číslice 2 a 4; pro každý případ zvlášť pak diskutujte zbylé podmínky.

Možné řešení. Pětimístné palindromy, v nichž se číslice 2 objevuje bezprostředně za číslicí 4, jsou právě následující:

$$42{*}24, \quad {*}424{*}, \quad {*}242{*}, \quad 24{*}42.$$

Pro tyto případy stačí nyní diskutovat dělitelnost dvanácti. Číslo je dělitelné dvanácti právě tehdy, když je dělitelné třemi a zároveň čtyřmi, tj. právě tehdy, když jeho ciferný součet je dělitelný třemi a zároveň poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi.

Číslo 24 je dělitelné čtyřmi, proto jsou palindromy typu $42{*}24$ vždy dělitelné čtyřmi, a proto se zajímáme pouze o dělitelnost třemi. Známé číslice mají ciferný součet 12, který dělitelný třemi je, proto hvězdička uprostřed musí zastupovat násobek tří — 0, 3, 6 nebo 9.

Palindromy typu ${*}424{*}$ jsou dělitelné čtyřmi, právě když poslední číslice je 0, 4 nebo 8. Protože jde o palindrom, stejná číslice bude i na začátku, proto varianta s nulou nevyhovuje. Po doplnění čtyřek je ciferný součet 18, po doplnění osmiček 26. Tudíž dělitelný třemi je pouze palindrom 44244.

Palindromy typu ${*}242{*}$ jsou dělitelné čtyřmi, právě když poslední číslice je 0, 4 nebo 8. Stejně jako v předchozím případě vylučujeme 0 a určíme ciferné součty: pro čtyřky je to 16, pro osmičky 24. Dělitelný třemi je pouze palindrom 82428.

Protože číslo 42 není dělitelné čtyřmi, palindromy typu $24{*}42$ nemohou být dělitelné čtyřmi, tedy ani dvanácti. Zadaným podmínkám vyhovují právě následují čísla:

$$42024,\ 42324,\ 42624,\ 42924,\ 44244,\ 82428.$$

Z8–I–4

Na střed hrnčířského kruhu jsme položili krychli, která měla na každé své stěně napsáno jedno přirozené číslo. Těsně předtím, než jsme kruh roztočili, jsme ze svého stanoviště viděli tři stěny krychle a tedy pouze tři čísla. Jejich součet byl 42. Po otočení hrnčířského kruhu o $90°$ jsme ze stejného místa pozorovali tři stěny s čísly dávajícími součet 34 a po otočení o dalších $90°$ jsme stále z téhož místa viděli tři čísla o součtu 53.

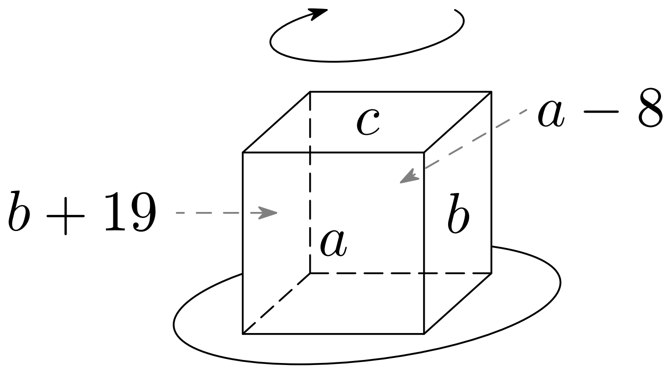
1. Určete součet tří čísel, která z našeho místa uvidíme, až se kruh otočí ještě o dalších $90°$.
2. Krychle po celou dobu ležela na stěně s číslem 6. Určete maximální možný součet všech šesti čísel na krychli.

(*L. Šimůnek*)

Nápad. Zaměřte se na vztah mezi čísly vzájemně rovnoběžných bočních stěn.

Možné řešení. Čísla, která vidíme před roztočením kruhu, označme a, b, c, přičemž c je číslo na horní stěně. Po otočení o $90°$ ztratíme z našeho pohledu stěnu s číslem a a objeví se stěna s ní rovnoběžná. Podle zadání se součet viditelných čísel změní ze 42 na 34, tedy zmenší se o 8. Nově se objevivší číslo je proto o 8 menší než a, tj. $a - 8$.

Obdobně uvažujeme o další otočce o $90°$. Při ní ztratíme z pohledu stěnu s číslem b a součet viditelných čísel se změní ze 34 na 53, tedy zvětší se o 19. Na zbývající boční stěně se proto objeví číslo $b + 19$.



Ještě po dalším otočení o $90°$ tak vidíme stěny s čísly $b + 19$, a, c. Ze zadání víme, že $a + b + c = 42$, tudíž $a + b + 19 + c = 42 + 19 = 61$. Součet 61 je řešením prvního úkolu.

Nyní řešíme druhý úkol. Před roztočením kruhu vidíme tři stěny se součtem 42, po otočení o $180°$ vidíme jiné dvě boční stěny a stále stejnou horní stěnu s číslem c, tentokrát jde o součet 53. Tedy součet čísel na těchto pěti stěnách je roven $42 + 53 - c$. Na krychli je podle zadání zespodu napsané číslo 6, součet všech jejích čísel je tudíž roven $6+42+53-c$, tj. $101 - c$. Máme-li určit největší možnou hodnotu tohoto výrazu, dosadíme za c nejmenší přípustnou hodnotu 1. A pak vidíme, že součet čísel na krychli mohl být nejvýše 100.

Jiné řešení druhého úkolu. Z výše uvedeného řešení použijeme obrázek s jeho popisem. Součet všech čísel na krychli je

$$a + b + (a - 8) + (b + 19) + c + 6 = 2a + 2b + c + 17.$$

Přitom platí, že všechny neznámé jsou přirozená čísla a $a \geqq 9$, aby i hodnota $a - 8$ byla přirozené číslo. Poslední podmínkou je $a + b + c = 42$. Abychom při daném součtu $a + b + c$ získali co největší hodnotu výrazu $2a+2b+c+17$, musíme za c zvolit co nejmenší přípustnou hodnotu, tj. 1, protože ostatní neznámé jsou ve výrazu zastoupeny ve svých násobcích. Součet $a + b$ pak nabývá hodnoty 41 a součet všech šesti čísel na krychli tak může být nejvýše

$$2a + 2b + c + 17 = 2 \cdot 41 + 1 + 17 = 100.$$

Z8–I–5

Pankrác, Servác a Bonifác jsou bratři, kteří mají P, S a B let. Víme, že P, S a B jsou přirozená čísla menší než 16, pro něž platí:

$$\begin{aligned} P &= \frac{5}{2}(B - S), \\ S &= 2(B - P), \\ B &= 8(S - P). \end{aligned}$$

Určete stáří všech tří bratrů. (*L. Hozová*)

Nápad. Bonifácův věk lze určit velmi snadno.

Možné řešení. Ze třetí rovnice plyne, že B je přirozené číslo menší než 16 právě tehdy, když $S - P = 1$, neboli $S = P + 1$; potom nutně $B = 8$. Dosadíme tyto poznatky do druhé rovnice a určíme P:

$$\begin{aligned} P + 1 &= 2(8 - P), \\ P + 1 &= 16 - 2P, \\ 3P &= 15, \\ P &= 5. \end{aligned}$$

Odtud $S = 5 + 1 = 6$ a snadno ověříme, že trojice $B = 8$, $P = 5$ a $S = 6$ vyhovuje také rovnici první: $5 = \frac{5}{2}(8 - 6)$. Pankrác má tedy 5, Servác 6 a Bonifác 8 let.

Poznámka. S rovnicemi ze zadání lze manipulovat různým způsobem, nicméně bez omezení $P, S, B < 16$ by úloha neměla řešení určeno jednoznačně — najdete nějaké další?

Jiné řešení. Ze zadání plyne, že P, S a B jsou kladná čísla, právě když $B > S > P > 0$. Stejně jako u předchozího řešení určíme, že ze třetí rovnice plyne $B = 8$ a $P = S - 1$. Navíc z druhé rovnice je patrné, že S je sudé číslo. Celkem tedy vidíme, že řešením úlohy může být jedině některá z následujících trojic čísel:

B	S	P
8	6	5
8	4	3
8	2	1

Dosazením do první a druhé rovnice zjistíme, že jediným řešením je trojice $B = 8$, $S = 6$ a $P = 5$.

Z8–I–6

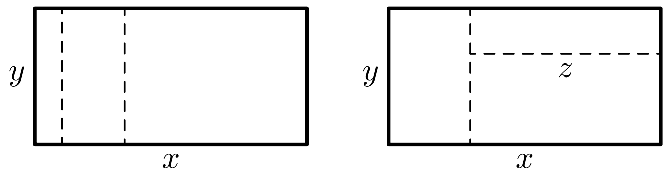
Janka si narýsovala obdélník s obvodem 22 cm a délkami stran vyjádřenými v centimetrech celými čísly. Potom obdélník rozdělila beze zbytku na tři obdélníky, z nichž jeden měl rozměry $2\,\mathrm{cm} \times 6\,\mathrm{cm}$. Součet obvodů všech tří obdélníků byl o 18 cm větší než obvod původního obdélníku. Jaké rozměry mohl mít původní obdélník? Najděte všechna řešení.

(*M. Dillingerová*)

Nápad. Určete, jak mohla Janka obdélník rozdělit; pro jednotlivé možnosti pak vyjádřete zadaný rozdíl obvodů pomocí délek dělicích čar.

Možné řešení. Všechny veličiny v textu jsou vyjádřeny v centimetrech, jednotky dále uvádět nebudeme. Délky stran Jančina obdélníku označíme x a y, podle zadání jsou to přirozená čísla.

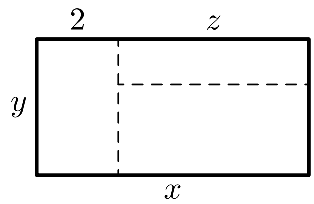
Nejprve zjistíme, jak mohla Janka svůj obdélník rozdělit. Typově máme pouze následující dvě možnosti (pozor, obrázky jsou schematické, tj. rozhodně nepředpokládáme, že $x > y$):



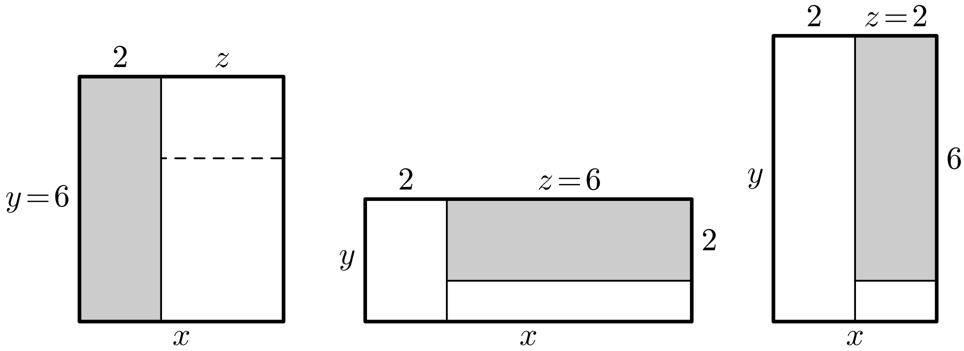
Obvod původního obdélníku je $2(x + y) = 22$, tedy $x + y = 11$. Součet obvodů tří nových obdélníků je vždy větší než obvod původní, a to právě o dvojnásobek součtu délek dělicích úseček, které jsou v obrázku vyznačeny čárkovaně. Tento rozdíl má být roven 18.

I. Obě dělicí úsečky mají stejnou délku, totiž y. Musí tedy platit $4y = 18$, odtud $y = 4{,}5$. To ovšem není možné, protože 4,5 není celé číslo. Tímto způsobem tudíž Janka obdélník nerozdělila.

II. Dvě dělicí úsečky, které leží v jedné přímce, mají součet délek y. Délku třetí dělicí úsečky označíme z. Potom musí platit $2y + 2z = 18$, tedy $y + z = 9$. To spolu s podmínkou $x + y = 11$ znamená, že rozměr x je o 2 větší než rozměr z. Tento poznatek si zaznamenáme do obrázku:



Nyní prověříme, který z nových obdélníků může mít rozměry 2×6 a jak může být umístěn — celkem máme tyto tři možnosti:



Pomocí dříve odvozených vztahů mezi x, y a z vyjádříme rozměry obdélníků v jednotlivých případech:

a) Je-li $y = 6$, pak $x = 5$ a $z = 3$.

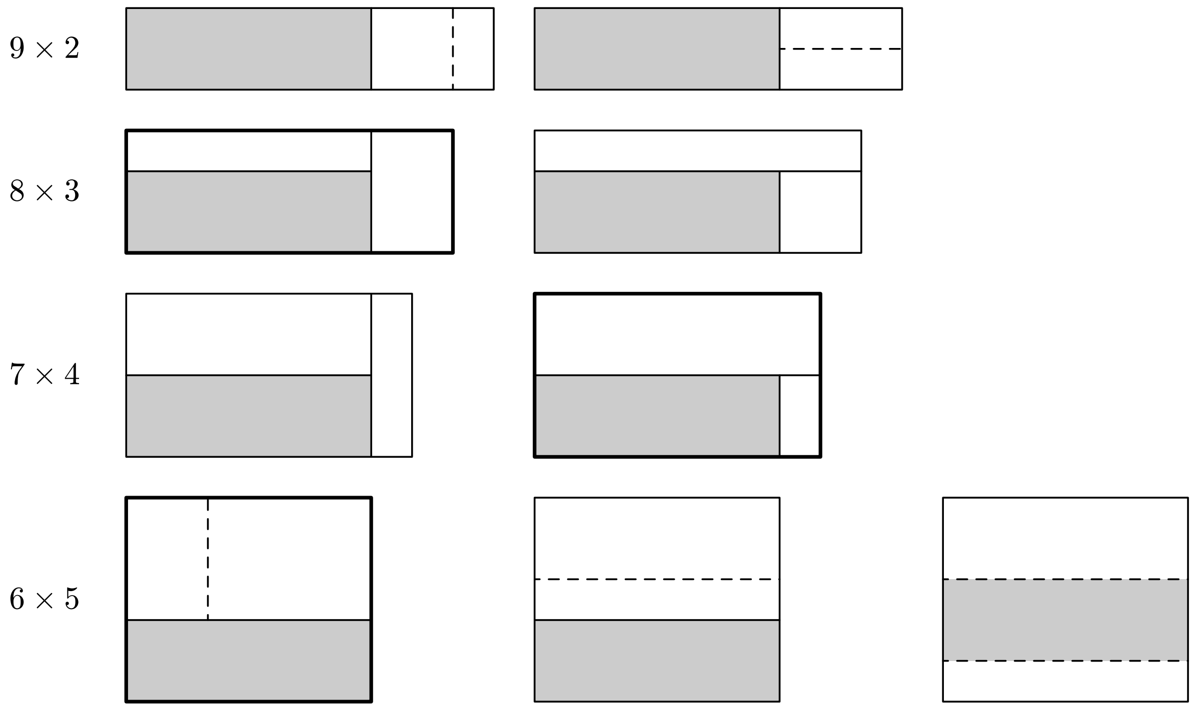
b) Je-li $z = 6$, pak $x = 8$ a $y = 3$.

c) Je-li $z = 2$, pak $x = 4$ a $y = 7$.

Jančin obdélník mohl mít rozměry 5×6, 8×3 nebo 4×7.

Poznámka. Při stejném značení jako výše z požadavku, aby Jančin obdélník obsahoval obdélník 2×6, plyne, že $x, y \geqq 2$. Protože x a y jsou přirozená čísla a $x + y = 11$, rozměry Jančina obdélníku by mohly být 2×9, 3×8, 4×7 nebo 5×6.

Nyní lze postupně probírat tyto čtyři případy, tzn. umístit obdélník 2×6, diskutovat možná dodatečná dělení a kontrolovat požadavek o obvodech. Takto rychle zjistíme, že jediné možnosti, jak mohla Janka svůj obdélník rozdělit, jsou právě výše uvedené možnosti a), b), c).



I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Pokladní v galerii prodává návštěvníkům vstupenky s číslem podle toho, kolikátí ten den přišli. První návštěvník dostane vstupenku s číslem 1, druhý s číslem 2, atd. Během dne však došel žlutý papír, na který se vstupenky tiskly, proto musela pokladní pokračovat tisknutím na papír červený. Za celý den prodala stejně žlutých vstupenek jako červených. Zjistila, že součet čísel na žlutých vstupenkách byl o 1 681 menší než součet čísel na červených vstupenkách. Kolik toho dne prodala vstupenek? (*M. Mach*)

Nápad. Všimněte si, o kolik se liší čísla na prodaných žlutých a červených vstupenkách.

Možné řešení. Označme počet žlutých vstupenek n. Na první žluté vstupence bylo číslo 1, na druhé 2, atd., na poslední žluté vstupence bylo číslo n. Na první červené vstupence bylo číslo $n+1$, na druhé červené $n+2$, atd., na poslední červené bylo číslo $2n$.

Všimněme si, že první červená vstupenka má číslo o n větší než první žlutá. Stejně tak druhá červená vstupenka má číslo o n větší než druhá žlutá; totéž platí pro všechny takovéto dvojice vstupenek, kterých je celkem n. Součet čísel na červených vstupenkách je proto o n^2 větší než součet čísel na vstupenkách žlutých. Ze zadání víme, že $n^2 = 1\,681$, tedy $n = 41$.

Pokladní toho dne prodala 41 žlutých a 41 červených vstupenek, celkem tedy 82 vstupenek.

Z9–I–2

Filoména má mobil s následujícím rozmístěním tlačítek:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Devítimístné telefonní číslo její nejlepší kamarádky Kunhuty má tyto vlastnosti:

- všechny číslice Kunhutina telefonního čísla jsou různé,
- první čtyři číslice jsou seřazeny podle velikosti od nejmenší po největší a středy jejich tlačítek tvoří čtverec,
- středy tlačítek posledních čtyř číslic také tvoří čtverec,
- telefonní číslo je dělitelné třemi a pěti.

Kolik různých devítimístných čísel by mohlo být Kunhutiným telefonním číslem? (*K. Pazourek*)

Nápad. Které číslice mohou tvořit poslední a které první čtveřici?

Možné řešení. Nejprve najděme všechny čtveřice tlačítek, jejichž středy tvoří čtverec — jsou to tlačítka s následujícími číslicemi:

$$\begin{array}{ll} 1,2,4,5 & 1,3,7,9 \\ 2,3,5,6 & 2,4,6,8 \\ 4,5,7,8 & 5,7,9,0 \\ 5,6,8,9 & \end{array}$$

Čtveřice v levém sloupci však využít nemůžeme, neboť vedle čtverce, který příslušná tlačítka tvoří, bychom žádný další čtverec ze zbylých tlačítek nesestavili. Protože telefonní číslo je dělitelné pěti, musí končit 5 nebo 0; proto poslední čtyři číslice telefonního čísla jsou 5, 7, 9, 0 (jejich pořadí diskutujeme později). Protože jsme již použili číslice 7 a 9, první čtyři číslice telefonního čísla musejí být 2, 4, 6, 8 (v tomto pořadí, jsou srovnány podle velikosti).

Dosud nepoužité číslice, které mohou být uprostřed telefonního čísla, jsou 1 a 3. Telefonní číslo má být dělitelné třemi, určeme tedy možné ciferné součty. Součet všech číslic na klávesnici je 45. Pokud by v telefonním čísle byla 1, tj. telefonní číslo by obsahovalo všechny číslice kromě 3, byl by ciferný součet $45 - 3 = 42$. Pokud by v telefonním čísle byla 3, byl by ciferný součet $45 - 1 = 44$. Číslo 42 je dělitelné 3, číslo 44 nikoli, prostřední číslice je tedy 1.

Protože jsme neopomněli žádný z požadavků v zadání, hledané telefonní číslo je

$$246\,81{*}\,{*}{*}{*},$$

kde poslední čtyři číslice jsou 5, 7, 9, 0 v neznámém pořadí, pouze víme, že na posledním místě musí být 5 nebo 0. Abychom zjistili počet všech možných Kunhutiných telefonních čísel, nebudeme je všechny vypisovat, pouze si touto představou pomůžeme: Poslední číslici lze zvolit dvojím způsobem, předposlední číslici poté vybíráme mezi třemi zbylými číslicemi, předcházející už jen mezi dvěma zbylými a na poslední nevyplněné místo nám vždy zbude jediná číslice. Dostáváme dohromady

$$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

možných pořadí na posledních čtyřech místech, a tedy i 12 možných Kunhutiných telefonních čísel.

Z9–I–3

Amálka pozorovala veverky na zahrádce hájenky, kde rostly tyto tři stromy: smrk, buk a jedle. Veverky seděly v klidu na stromech, takže je mohla spočítat — bylo jich 34. Když přeskákalo 7 veverek ze smrku na buk, bylo jich na buku stejně jako na obou dvou jehličnanech dohromady. Poté ještě přeskákalo 5 veverek z jedle na buk, v tu chvíli bylo na jedli stejně veverek jako na smrku. Na buku jich poté bylo dvakrát tolik, co na jedli ze začátku. Kolik veverek původně sedělo na každém ze stromů? (*M. Mach*)

Nápad. Sestavte soustavu rovnic. Před vlastním řešením soustavy si všimněte, že některé rovnice jsou přebytečné, tzn. lze je odvodit z ostatních.

Možné řešení. Původní počet veverek na smrku označíme s, na buku b a na jedli j. Ze zadání můžeme sestavit soustavu čtyř rovnic o těchto třech neznámých:

$$\begin{aligned} s + b + j &= 34, \\ b + 7 &= j + s - 7, \\ j - 5 &= s - 7, \\ b + 7 + 5 &= 2j. \end{aligned}$$

Všimněme si, že sečtením třetí a čtvrté rovnice dostaneme rovnici druhou. Pro vyřešení soustavy rovnic proto stačí vybrat libovolné dvě z těchto tří rovnic a doplnit je rovnicí první. Takto dostaneme soustavu tří rovnic o třech neznámých. Ukážeme si řešení s první, druhou a čtvrtou rovnicí:

$$\begin{aligned} s + b + j &= 34, \\ b + 7 &= j + s - 7, \\ b + 7 + 5 &= 2j. \end{aligned}$$

Sečteme první dvě rovnice a upravíme:

$$\begin{aligned} s + 2b + j + 7 &= 27 + j + s, \\ 2b &= 20, \\ b &= 10. \end{aligned}$$

Dosadíme tento výsledek do poslední rovnice a vyjádříme j:

$$\begin{aligned} 10 + 7 + 5 &= 2j, \\ 22 &= 2j, \\ j &= 11. \end{aligned}$$

Vše dosadíme do první rovnice a vyjádříme s:

$$\begin{aligned} s + 10 + 11 &= 34, \\ s &= 13. \end{aligned}$$

Na smrku původně sedělo 13, na buku 10 a na jedli 11 veverek.

Jiný nápad. Určete, kolik veverek sedělo na buku ve chvíli, kdy jich tam bylo stejně jako na obou jehličnanech.

Jiné řešení. Po prvním přeskákání byla na buku přesně polovina veverek, čili 17. Protože jich na buk 7 přiskočilo, sedělo původně na buku $17 - 7 = 10$ veverek.

Po druhém přeskákání bylo na buku $17 + 5 = 22$ veverek. Víme, že na konci bylo na buku dvakrát více veverek než na jedli na začátku, tedy na začátku sedělo na jedli $22 : 2 = 11$ veverek.

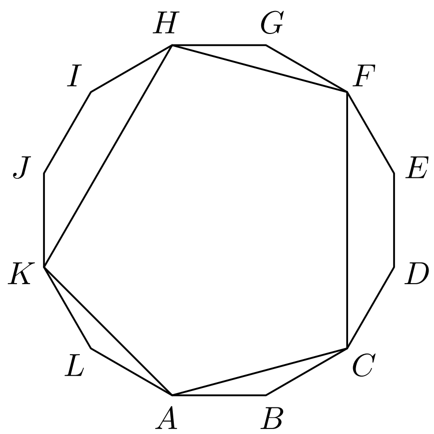
Celkem bylo veverek 34, proto bylo původně na smrku $34-10-11 = 13$ veverek. Právě jsme došli k původním počtům veverek na všech stromech, ale vůbec jsme nepracovali se zadanou informací, že po všech přeskocích bylo na jedli stejně veverek jako na smrku. Musíme ověřit, zda tato informace není v rozporu s předchozími výpočty: $11-5 = 13-7$, tedy naše výsledky odpovídají celému zadání.

Na smrku původně sedělo 13, na buku 10 a na jedli 11 veverek.

Poznámka. Uvedená řešení představují různé pohledy na tentýž problém. Srovnejte zejména, jak jsme odhalili přebytečnost jedné ze zadaných informací v prvním a jak ve druhém případě. Uměli byste tuto přebytečnost zjistit i jinak?

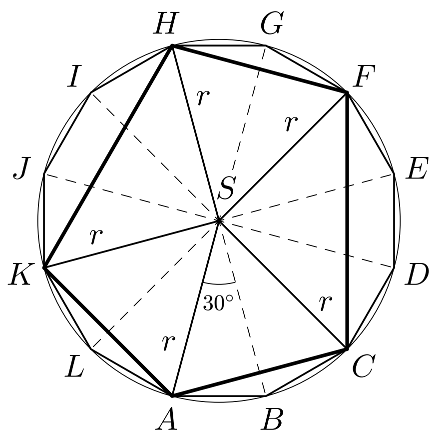
Z9–I–4

V pravidelném dvanáctiúhelníku $ABCDEFGHIJKL$ vepsaném do kružnice o poloměru 6 cm určete obvod pětiúhelníku $ACFHK$. (*K. Pazourek*)



Nápad. Rozdělte pětiúhelník na trojúhelníky se společným vrcholem ve středu kružnice opsané a zjistěte jejich vlastnosti.

Možné řešení. Nejprve spočtěme velikost středového úhlu pravidelného dvanáctiúhelníku $ABCDEFGHIJKL$, tj. úhlu s vrcholem ve středu S opsané kružnice a rameny procházejícími sousedními vrcholy. Součet všech dvanácti středových úhlů je $360°$, tudíž velikost jednoho středového úhlu je $360° : 12 = 30°$.



Velikosti středových úhlů pětiúhelníku $ACFHK$ jsou:

$$|\sphericalangle ASC| = |\sphericalangle FSH| = |\sphericalangle KSA| = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ,$$
$$|\sphericalangle CSF| = |\sphericalangle HSK| = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ.$$

Trojúhelníky ASC, FSH, KSA jsou tudíž rovnostranné a trojúhelníky CSF a HSK jsou rovnoramenné pravoúhlé. Proto

$$|AC| = |FH| = |KA| = r = 6\,\mathrm{cm},$$
$$|CF| = |HK| = r\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\,\mathrm{cm}.$$

Obvod pětiúhelníku $ACFHK$ je tak roven $3 \cdot 6 + 2 \cdot 6\sqrt{2} = 18 + 12\sqrt{2} \doteq 34{,}97\,(\mathrm{cm})$.

Z9–I–5

Před vánočním koncertem nabízeli žáci k prodeji 60 výrobků z hodin výtvarné výchovy. Cenu si mohl každý zákazník určit sám a celý výtěžek šel na dobročinné účely. Na začátku koncertu žáci spočítali, kolik korun v průměru utržili za jeden prodaný výrobek, a vyšlo jim přesně celé číslo. Protože stále neprodali všech 60 výrobků, nabízeli je i po koncertě. To si lidé koupili ještě dalších sedm, za které dali celkem 2 505 Kč. Tím se průměrná tržba za jeden prodaný výrobek zvýšila na rovných 130 Kč. Kolik výrobků pak zůstalo neprodaných? (*L. Šimůnek*)

Nápad. Určete vztah mezi počtem výrobků prodaných před koncertem a za ně získanou částkou. Uvědomte si, že všechny neznámé mají být celá čísla.

Možné řešení. Počet výrobků, které žáci prodali před koncertem, označme v a obnos v korunách, který za ně získali, označme k. Podle zadání je podíl $\frac{k}{v}$ celé číslo a platí

$$\frac{k + 2\,505}{v + 7} = 130.$$

Z této rovnice vyjádříme neznámou k pomocí neznámé v:

$$k + 2\,505 = 130v + 130 \cdot 7,$$
$$k = 130v - 1\,595.$$

Získaný výraz dosadíme do zlomku $\frac{k}{v}$ a následně jej částečně vydělíme:

$$\frac{130v - 1\,595}{v} = 130 - \frac{1\,595}{v}.$$

Neznámá v je přirozené číslo, a protože právě uvedený výraz má být roven celému číslu, musí být v dělitelem čísla 1 595. Přitom číslo $1\,595 = 5 \cdot 11 \cdot 29$ má právě následující dělitele:

1, 5, 11, 29, 55, 145, 319, 1 595.

Podle zadání zůstalo po prodeji v výrobků z celkových 60 minimálně 7, tedy $v \leqq 53$. Pokud do rovnice $k = 130v - 1595$ dosadíme za v 1, 5 či 11, dostaneme k záporné, což odporuje zadání. Pro $v = 29$ je tržba k kladná, takže jediná přípustná hodnota pro v je 29. Celkově se prodalo $29 + 7 = 36$ výrobků a neprodaných zůstalo $60 - 36 = 24$.

Jiný nápad. Pokud se hovoří o průměrné ceně, zkuste si situaci zjednodušit představou, že všichni zmínění zaplatili shodně právě tuto cenu.

Jiné řešení. Pro potřeby řešení můžeme situaci zjednodušit a představit si, že každý zákazník nakupující před koncertem zaplatil stejný celočíselný obnos. Ten se rovnal průměrné ceně vypočítané žáky před koncertem.

Po koncertě přišla sedmice zákazníků, která za každého dřívějšího zákazníka dorovnala zaplacenou částku do 130 Kč a sama za sebe zaplatila $7 \cdot 130$ Kč. Celkové dorovnávaní ceny tedy odpovídalo částce $2\,505 - 7 \cdot 130 = 1\,595$ (Kč).

Tuto sumu musíme rozložit na součin, kde jedním činitelem bude počet zákazníků před koncertem a druhým činitelem počet korun, které za každého takového zákazníka doplatila sedmice později příchozích. O prvním jmenovaném činiteli víme ze zadání, že musí být menší nebo roven 53, a o druhém víme, že musí být menší než 130. Číslo 1 595 lze rozložit na součin dvou přirozených čísel právě těmito způsoby:

$$1 \cdot 1\,595,\ 5 \cdot 319,\ 11 \cdot 145,\ 29 \cdot 55.$$

Uvedeným podmínkám vyhovuje jedině rozklad $29 \cdot 55$. Celkově se tedy prodalo $29 + 7 = 36$ výrobků a neprodaných zůstalo $60 - 36 = 24$.

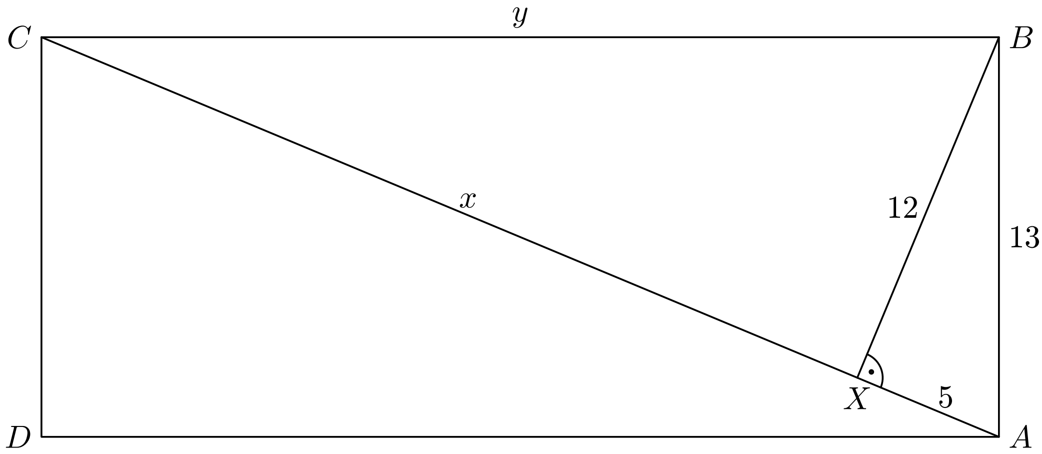
Z9–I–6

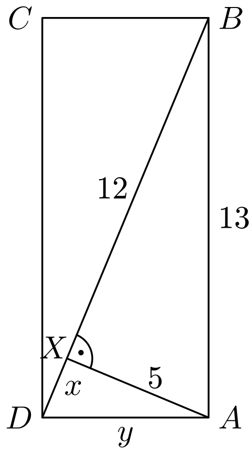
V obdélníkové zahradě roste broskvoň. Tento strom je od dvou sousedních rohů zahrady vzdálen 5 metrů a 12 metrů a vzdálenost mezi zmíněnými dvěma rohy je 13 metrů. Dále víme, že broskvoň stojí na úhlopříčce zahrady. Jak velká může být plocha zahrady? (*M. Mach*)

Nápad. Užijte vhodně Pythagorovu větu, příp. větu opačnou.

Možné řešení. Obdélník představující půdorys zahrady označíme $ABCD$, broskvoň na jedné z jeho úhlopříček je zastoupena bodem X. Řekněme, že dva sousední rohy ze zadání jsou A, B a platí $|AX| = 5$, $|BX| = 12$, $|AB| = 13$. (Všechny délky jsou v metrech a jednotky dále nepíšeme.) Tato čísla tvoří pythagorejskou trojici, čili platí $5^2 + 12^2 = 13^2$. Proto je trojúhelník AXB pravoúhlý s přeponou AB, tj. s pravým úhlem u vrcholu X.

Bod X může ležet buď na úhlopříčce AC nebo na úhlopříčce BD, budeme diskutovat obě možnosti. V každém případě vzdálenost bodu X od druhého vrcholu na úhlopříčce označíme x a neznámou délku strany obdélníku označíme y. Ze zadaných informací určíme y, plocha zahrady (v metrech čtverečních) pak bude rovna $13y$.





I. Bod X leží na úhlopříčce AC. Podle Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky ABC a BXC sestavíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned}(5+x)^2 &= 13^2 + y^2,\\ y^2 &= 12^2 + x^2.\end{aligned}$$

Do první rovnice dosadíme za y^2 a vypočteme x:

$$\begin{aligned}(5+x)^2 &= 13^2 + 12^2 + x^2,\\ 25 + 10x + x^2 &= 169 + 144 + x^2,\\ 10x &= 288,\\ x &= \frac{144}{5}.\end{aligned}$$

Dosadíme za x do druhé rovnice a výraz upravíme:

$$y^2 = 12^2 + \left(\frac{144}{5}\right)^2 = 144 + \frac{20\,736}{25} = \frac{24\,336}{25}.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{156}{5}$ a obsah obdélníku $ABCD$, tj. plocha zahrady (v metrech čtverečních), v tomto případě je:

$$13 \cdot \frac{156}{5} = \frac{2\,028}{5} = 405{,}6.$$

II. Bod X leží na úhlopříčce BD. Podle Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky DAB a DXA sestavíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} (12 + x)^2 &= 13^2 + y^2, \\ y^2 &= 5^2 + x^2. \end{aligned}$$

Do první rovnice dosadíme za y^2 a vypočteme x:

$$\begin{aligned} (12 + x)^2 &= 13^2 + 5^2 + x^2, \\ 144 + 24x + x^2 &= 169 + 25 + x^2, \\ 24x &= 50, \\ x &= \frac{25}{12}. \end{aligned}$$

Dosadíme za x do druhé rovnice a výraz upravíme:

$$y^2 = 5^2 + \left(\frac{25}{12}\right)^2 = 25 + \frac{625}{144} = \frac{4\,225}{144}.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{65}{12}$ a obsah obdélníku $ABCD$, tj. plocha zahrady (v metrech čtverečních), v tomto případě je:

$$13 \cdot \frac{65}{12} = \frac{845}{12} \doteq 70{,}42.$$

Poznámka. Všimněte si výpočtu délky x. Dvojím užitím Pythagorovy věty jsme v prvním případě odvodili, že $5x = 144$, což odpovídá $|AX| \cdot |XC| = |XB|^2$. Uvedený výpočet v podstatě dokazuje, že tato rovnost platí v libovolném pravoúhlém trojúhelníku ABC, kde X je pata výšky na přeponu AC. Toto tvrzení je známé jako Eukleidova věta o výšce.

Jiný nápad. Všimněte si podobných trojúhelníků.

Jiné řešení. Při stejném značení jako výše můžeme jednotlivé možnosti diskutovat následovně.

I. Bod X leží na úhlopříčce AC. Trojúhelníky ABC a AXB jsou oba pravoúhlé a mají stejný vnitřní úhel u společného vrcholu A. Tyto trojúhelníky jsou tedy podobné, a proto platí:

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|XB|}{|AX|},$$

neboli

$$\frac{y}{13} = \frac{12}{5}.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{156}{5}$, a závěr je stejný jako u předchozího řešení.

II. Bod X leží na úhlopříčce BD. Trojúhelníky DAB a AXB jsou oba pravoúhlé a mají stejný vnitřní úhel u společného vrcholu B. Tyto trojúhelníky jsou tedy podobné, a proto platí:

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|AX|}{|XB|},$$

neboli

$$\frac{y}{13} = \frac{5}{12}.$$

Odtud plyne, že $y = \frac{65}{12}$, a závěr je stejný jako u předchozího řešení.