60. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Vítek má napsána dvě čísla, 541 a 293. Z šesti použitých číslic má nejprve vyškrtnout dvě tak, aby součet dvou takto získaných čísel byl největší možný. Poté má z původních šesti číslic vyškrtnout dvě tak, aby rozdíl dvou takto získaných čísel byl nejmenší možný (odečítá menší číslo od většího). Které číslice má vyškrtnout? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Nejprve budeme vyškrtávat číslice tak, aby byl součet co největší. Buď můžeme dvě číslice vyškrtnout z prvního čísla, nebo můžeme dvě číslice vyškrtnout z druhého, nebo je možnost vyškrtnout z každého čísla po jedné číslici. V každém případě škrtáme číslice tak, aby výsledný sčítanec byl co největší. Dostáváme tato čísla:

- škrtneme 4 a 1, zbyde 5 a 293: součet 298,
- škrtneme 2 a 3, zbyde 541 a 9: součet 550,
- škrtneme 1 a 2, zbyde 54 a 93: součet 147.

Vidíme, že největší součet (550) získáme po vyškrtnutí číslic 2 a 3 z druhého čísla.

Nyní budeme hledat nejmenší rozdíl. Opět můžeme vyškrtnout dvě číslice z prvního čísla, nebo dvě číslice z druhého, nebo z každého čísla po jedné číslici. Kdybychom vyškrtávali dvě číslice z jednoho čísla, byl by rozdíl vždy trojmístné číslo. Když vyškrtáváme z každého čísla po jedné číslici, dostaneme tato čísla:

- škrtneme 5 a 2, zbyde 41 a 93: rozdíl 52,
- škrtneme 5 a 9, zbyde 41 a 23: rozdíl 18,
- škrtneme 5 a 3, zbyde 41 a 29: rozdíl 12,
- škrtneme 4 a 2, zbyde 51 a 93: rozdíl 42,
- škrtneme 4 a 9, zbyde 51 a 23: rozdíl 28,
- škrtneme 4 a 3, zbyde 51 a 29: rozdíl 22,
- škrtneme 1 a 2, zbyde 54 a 93: rozdíl 39,
- škrtneme 1 a 9, zbyde 54 a 23: rozdíl 31,
- škrtneme 1 a 3, zbyde 54 a 29: rozdíl 25.

Vidíme, že nejmenší rozdíl (12) získáme vyškrtnutím 5 z prvního čísla a 3 z druhého čísla.

Z5–I–2

V Trpasličím království měří vzdálenosti v pohádkových mílích (pm), v pohádkových sázích (ps) a v pohádkových loktech (pl). Na vstupní bráně do Trpasličího království je následující tabulka pro převody mezi jejich jednotkami a našimi:

- $1\,\mathrm{pm} = 3{,}85\,\mathrm{m}$,
- $1\,\mathrm{ps} = 105\,\mathrm{cm}$,
- $1\,\mathrm{pl} = 250\,\mathrm{mm}$.

Král Trpaslík I. nechal přeměřit vzdálenost od zámecké brány k pohádkovému jezírku. Tři pozvaní zeměměřiči dospěli k těmto výsledkům: první uváděl 4 pm 4 ps 18 pl, druhý 3 pm 2 ps 43 pl a třetí 6 pm 1 ps 1 pl. Jeden z nich se však zmýlil. Jaká je vzdálenost v metrech od zámecké brány k pohádkovému jezírku? O kolik centimetrů se spletl nepřesný zeměměřič? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Nejprve si převedeme pohádkové míry např. na centimetry:

$$1\,\mathrm{pm} = 385\,\mathrm{cm},\ 1\,\mathrm{ps} = 105\,\mathrm{cm},\ 1\,\mathrm{pl} = 25\,\mathrm{cm}.$$

Nyní vyjádříme v centimetrech vzdálenosti změřené jednotlivými zeměměřiči:
1. zeměměřič naměřil 4 pm 4 ps 18 pl, tj.

$$4 \cdot 385 + 4 \cdot 105 + 18 \cdot 25 = 1\,540 + 420 + 450 = 2\,410\,(\mathrm{cm}).$$

2. zeměměřič naměřil 3 pm 2 ps 43 pl, tj.

$$3 \cdot 385 + 2 \cdot 105 + 43 \cdot 25 = 1\,155 + 210 + 1\,075 = 2\,440\,(\mathrm{cm}).$$

3. zeměměřič naměřil 6 pm 1 ps 1 pl, tj.

$$6 \cdot 385 + 1 \cdot 105 + 1 \cdot 25 = 2\,310 + 105 + 25 = 2\,440\,(\mathrm{cm}).$$

Vzdálenost od zámecké brány k pohádkovému jezírku je 2 440 cm = 24,4 m. První zeměměřič se spletl o $2\,440 - 2\,410 = 30$ (cm).

Z5–I–3

Čtyři kamarádi Adam, Mojmír a dvojčata Petr a Pavel získali v hodinách matematiky celkem 52 smajlíků, každý alespoň 1. Přitom dvojčata dohromady mají 33, ale nejúspěšnější byl Mojmír. Kolik jich získal Adam? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Všech smajlíků je 52, přitom dvojčata jich získala 33 a Adam alespoň jeden. Pro Mojmíra zbývá nejvýše $52 - 33 - 1 = 18$ smajlíků. Aby jich měl nejvíc ze všech, může každé z dvojčat mít nejvýše 17 smajlíků. To ale znamená, že jich Petr získal právě 17 a Pavel 16, nebo naopak. Kdyby měl totiž jeden méně než 16, musel by mít druhý víc než 17 tak, aby dohromady měli 33. Odtud také vyplývá, že Mojmír nemohl získat méně než 18 smajlíků, aby měl víc než každé dvojče. Proto Mojmír získal právě 18 smajlíků a na Adama tak zbývá jeden smajlík :-).

Jiné řešení. Víme, že dvojčata získala dohromady 33 smajlíků a přitom každý alespoň jeden. Kdyby Petr získal 32 smajlíků a Pavel jeden, musel by jich Mojmír získat alespoň 33, aby měl ze všech nejvíc. Pak by ale všichni dohromady i s Adamem měli alespoň $33 + 33 + 1 = 67$ smajlíků, což není možné, protože ze zadání víme, že dohromady mají 52. Podobně, kdyby Petr získal 31 smajlíků a Pavel 2, musel by Mojmír mít alespoň 32, dohromady s Adamem pak $33+32+1 = 66$, což je stále moc… Stejnou úvahou lze vyloučit všechny možnosti rozdělení smajlíků mezi dvojčaty až na následující případ: Petr 17, Pavel 16 (nebo opačně), potom Mojmír 18 a Adam 1.

Z5–I–4

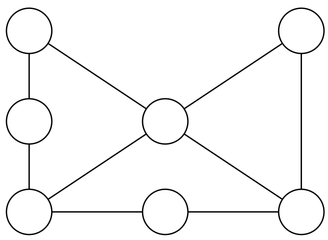
Pan Tik a pan Tak prodávali budíky v prodejnách Před Rohem a Za Rohem. Pan Tik tvrdil, že Před Rohem prodali o 30 budíků více než Za Rohem, zatímco pan Tak tvrdil, že Před Rohem prodali třikrát více budíků než Za Rohem. Nakonec se ukázalo, že Tik i Tak měli pravdu. Kolik budíků prodali v obou prodejnách celkem? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Z Takovy informace plyne, že pokud počet budíků prodaných v prodejně Za Rohem představuje jeden díl, pak počet budíků prodaných v prodejně Před Rohem představuje tři tyto díly. Z Tikovy informace potom vyplývá, že dvěma těmto dílům odpovídá 30 budíků. Počet budíků v obou prodejnách odpovídá čtyřem dílům, celkem tedy prodali $30 + 30 = 60$ budíků.

Poznámka. Jednomu dílu odpovídá 15 budíků ($30 : 2 = 15$), takže v prodejně Za Rohem bylo prodáno 15 budíků. V prodejně Před Rohem prodali 45 budíků, protože $3 \cdot 15 = 45$. V obou prodejnách pak prodali celkem $15 + 45 = 60$ budíků.

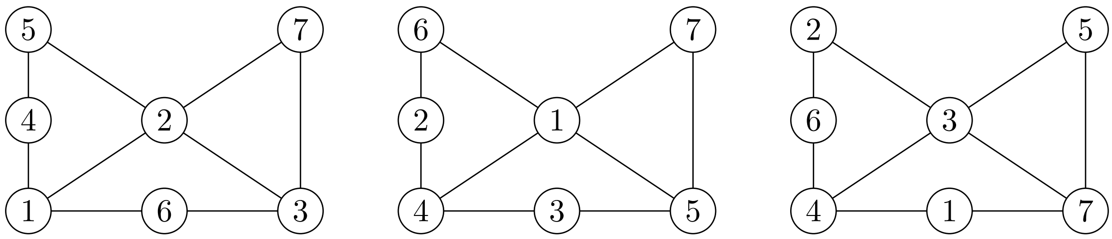
Z5–I–5

Do kroužků na obrázku doplňte čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7 tak, aby součet čísel na každé vyznačené linii byl stejný. Žádné číslo přitom nesmí být použito víckrát.



(*M. Smitková*)

Možné řešení. Zkoušením nacházíme tato tři řešení:



Zkoušení můžeme s výhodou začínat např. vyplněním dvou kroužků na svislé linii vpravo. Jako jediná obsahuje pouze dvě políčka, proto do nich patří spíše větší čísla.

Hodnocení. I jediné správné řešení bez komentáře ohodnoťte „výborně“.

Poznámka. Součet všech použitých čísel je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$. Všimneme si kroužku v levém dolním rohu. Vychází z něj tři úsečky, na každé z nich leží další dva kroužky. Tím máme spojeno všech sedm kroužků.

Zjistíme, že číslo v levém dolním rohu nemůže být libovolné: Součet čísel ve zbylých dvou kroužcích na každé ze tří zmiňovaných linií musí být stejný. Trojnásobek tohoto součtu je proto stejný jako rozdíl mezi 28 a číslem v levém dolním rohu. Proto v levém dolním rohu může být jedině 1, 4 nebo 7.

Potom součet zbylých dvou čísel na zmiňovaných liniích je po řadě 9, 8 nebo 7, a součet všech čísel na jedné linii je po řadě 10, 12 nebo 14. Na základě těchto součtů rozdělíme zbylá čísla do dvojic a z každé dvojice vybereme jedno tak, aby součet těchto tří vybraných čísel byl rovněž 10, 12 nebo 14. Tato tři čísla budou ležet na zatím nevybrané úhlopříčce. Podobným způsobem vybereme dvojici čísel na pravou stranu čtverce. Tak získáváme výše uvedená tři řešení a zároveň máme ověřeno, že žádné další řešení už není.

Z5–I–6

Paní Široká čekala večer hosty. Nejprve pro ně připravila 25 chlebíčků. Pak spočítala, že by si každý host mohl vzít dva, tři by se však na všechny nedostaly. Řekla si, že kdyby vyrobila ještě 10 chlebíčků, mohl by si každý host vzít tři, ale čtyři ne každý. To jí přišlo stále málo. Nakonec uchystala dohromady 52 chlebíčků. Každý host by si tedy mohl vzít čtyři chlebíčky, ale pět by se na všechny nedostalo. Kolik hostů paní Široká očekávala? Ona sama drží dietu a večer nikdy nejí. (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Nejprve pracujme s částí zadání, kde se uvažuje o 25 chlebíčcích. Podle ní paní Široká očekávala nejvýše 12 hostů, protože $25 : 2 = 12$, zbytek 1, což znamená, že 12 lidí by si mohlo vzít po dvou chlebíčcích, pak by však zbyl pouze jediný. Zde též zjišťujeme, že paní Široká čekala více než 8 hostů, protože $25 : 3 = 8$, zbytek 1, což znamená, že při 8 hostech by si všichni mohli vzít po třech chlebíčcích. Zatím tedy připadá v úvahu, že mělo přijít 9, 10, 11 nebo 12 hostů.

Teď uvažujme pouze o části zadaní, v níž se hovoří o 35 chlebíčcích. Určíme, že paní Široká počítala maximálně s 11 hosty, jelikož $35 : 3 = 11$, zbytek 2, a více než s 8 hosty, jelikož $35 : 4 = 8$, zbytek 3. Tedy paní Široká mohla čekat 9, 10 nebo 11 hostů.

Dále pracujme jen s rozvahou nad 52 chlebíčky. Podle ní paní Široká čekala nejvýše 13 hostů, protože $52 : 4 = 13$, a přitom více než 10 hostů, protože $52 : 5 = 10$, zbytek 2. Počítala tedy s 11, 12 nebo 13 hosty.

Vidíme, že se všemi údaji v zadání se shoduje jediný počet hostů, a to 11.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním odstavci předchozího řešení určíme, že paní Široká mohla očekávat 9, 10, 11 nebo 12 hostů. Pro každý počet zjistíme, zda odpovídá i dalším údajům v zadání.

9 hostů: Při 35 chlebíčcích by si všichni mohli vzít po třech chlebíčcích a nikoli po čtyřech, neboť $9 \cdot 3 < 35$ a $9 \cdot 4 > 35$. Při 52 chlebíčcích by si každý mohl vzít čtyři chlebíčky, ale dokonce i pět, protože $9 \cdot 4 < 52$ i $9 \cdot 5 < 52$. Tento počet hostů zavrhujeme.

10 hostů: Při 35 chlebíčcích by si všichni mohli vzít po třech chlebíčcích a nikoli po čtyřech, poněvadž $10 \cdot 3 < 35$ a $10 \cdot 4 > 35$. Při 52 chlebíčcích by si každý mohl vzít čtyři chlebíčky, ale dokonce i pět, protože $10 \cdot 4 < 52$ i $10 \cdot 5 < 52$. Tento počet hostů též zavrhujeme.

11 hostů: Při 35 chlebíčcích by si všichni mohli vzít po třech chlebíčcích a nikoli po čtyřech, protože $11 \cdot 3 < 35$ a $11 \cdot 4 > 35$. Při 52 chlebíčcích by si všichni mohli vzít po čtyřech chlebíčcích a nikoli po pěti, jelikož $11 \cdot 4 < 52$ a $11 \cdot 5 > 52$. Tento počet hostů odpovídá celému zadání.

12 hostů: Při 35 chlebíčcích by si nemohli všichni vzít po třech chlebíčcích, protože $12 \cdot 3 > 35$. Tento počet hostů zavrhujeme.

Paní Široká čekala 11 hostů.

I. kolo kategorie Z6

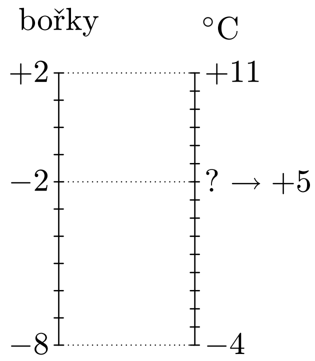
Z6–I–1

Když Bořek natíral vrata garáže, přetřel omylem i stupnici nástěnného venkovního teploměru. Trubička se rtutí však zůstala nepoškozená, a tak Bořek původní stupnici přelepil páskem vlastní výroby. Na něj pečlivě vyrýsoval dílky, všechny byly stejně velké a označené čísly. Jeho dílek měl však jinou velikost než původní dílek, který představoval jeden stupeň Celsia, a i nulu Bořek umístil jinam, než kde bylo $0\,^\circ\mathrm{C}$. Takto začal Bořek měřit teplotu ve vlastních jednotkách: bořcích. Když by měl teploměr ukazovat teplotu $11\,^\circ\mathrm{C}$, ukazoval 2 bořky. Když by měl ukazovat $-4\,^\circ\mathrm{C}$, ukazoval -8 bořků. Jaká je teplota ve stupních Celsia, vidí-li Bořek na svém teploměru teplotu -2 bořky? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Při $11\,^\circ\mathrm{C}$ ukazuje teploměr 2 bořky. Když teplota klesne na $-4\,^\circ\mathrm{C}$, tedy o $15\,^\circ\mathrm{C}$, ukazuje teploměr -8 bořků, tedy o 10 bořků méně než v prvém případě. Změna teploty o 10 bořků odpovídá změně o $15\,^\circ\mathrm{C}$, tudíž změna o 1 bořek představuje změnu o $1{,}5\,^\circ\mathrm{C}$. Teplota -2 bořky, na kterou se ptá úloha, je o 4 bořky menší než teplota uvedená v úvodu našeho řešení. Teplota -2 bořky je proto ve stupních Celsia rovna

$$11 - 4 \cdot 1{,}5 = 5.$$

Jiné řešení. Úlohu lze řešit i graficky např. na milimetrovém papíře:



Z6–I–2

Začínající písničkář prodával vždy po vystoupení CD se svou hudbou. Ve čtvrtek prodal osm stejných CD. Den nato už nabízel i své nové CD a lidé si tak mohli koupit to samé jako ve čtvrtek nebo nové. V sobotu chtěli všichni posluchači nové CD a písničkář jich prodal ten den šest. V jednotlivých dnech utržil 590 Kč, 720 Kč a 840 Kč, neprozradíme však, která částka patří ke kterému dni.

- Kolik stálo starší CD?
- Kolik nových CD prodal v pátek?

(*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Nejprve se pokusíme přiřadit jednotlivé částky ke dnům. Čtvrteční tržba musí být násobkem osmi, sobotní násobkem šesti. Čísla 720 a 840 jsou obě násobky šesti i osmi. Číslo 590 není násobkem šesti ani osmi. Tedy písničkář buď utržil a) ve čtvrtek 720 Kč a v sobotu 840 Kč nebo b) naopak. V pátek získal určitě 590 Kč. Prověřme obě možnosti.

a) Cena starého CD by byla $720 : 8 = 90$ (Kč) a cena nového $840 : 6 = 140$ (Kč). Ověříme, zda lze z uvedených dvou cen složit pátečních 590 Kč. Uvažujme postupně různé počty nových CD, jejich celkovou cenu vždy odečtěme od 590 Kč a sledujme, zda je výsledný rozdíl dělitelný číslem 90.

za nová CD	0	$1 \cdot 140$	$2 \cdot 140$	$3 \cdot 140$	$4 \cdot 140$
za stará CD	590	450	310	170	30

Tabulka ukazuje, že z cen 90 Kč a 140 Kč lze složit částku 590 Kč, a to jediným způsobem: $1 \cdot 140 + 5 \cdot 90$.

b) Cena starého CD by byla $840 : 8 = 105$ (Kč) a cena nového $720 : 6 = 120$ (Kč). Podobně jako v předchozím případě ověříme, zda lze z uvedených dvou cen složit pátečních 590 Kč. (Tabulka bude jednodušší, uvážíme-li dopředu, že páteční tržba za stará CD musí mít na místě jednotek nulu, aby i tržba za nová CD měla na místě jednotek nulu.)

za stará CD	0	$2 \cdot 105$	$4 \cdot 105$
za nová CD	590	380	170

Tabulka ukazuje, že z cen 105 Kč a 120 Kč nelze složit 590 Kč.

Úloha má jediné řešení: staré CD stálo 90 Kč a v pátek písničkář prodal jedno nové CD.

Z6–I–3

Vojta napsal číslo 2010 stokrát bez mezer za sebou. Kolik čtyřmístných a kolik pětimístných souměrných čísel bylo ukryto v tomto zápise? (Souměrné číslo je takové číslo, které je stejné, je-li čteno zepředu i zezadu, např. 39193.) (*L. Hozová*)

Možné řešení. Vojtův zápis začíná takto: 2010201020102010... Kdyby Vojta napsal 2010 dvakrát za sebou, bylo by v zápise jedno pětimístné souměrné číslo 20102 a jedno pětimístné souměrné číslo 10201. Kdyby napsal 2010 třikrát za sebou, bylo by v zápise každé z výše uvedených souměrných čísel dvakrát. Pokračujeme-li v této úvaze dál, zjišťujeme, že když Vojta napsal 2010 stokrát za sebou, bylo v zápise každé uvedené souměrné číslo 99krát, tj. 99krát číslo 20102 a 99krát číslo 10201.

V zápise tedy bylo ukryto $2 \cdot 99 = 198$ pětimístných souměrných čísel. Čtyřmístná souměrná čísla v zápise nejsou.

Z6–I–4

Součin věků dědy Vendelína a jeho vnoučat je 2010. Součet věků všech vnoučat je 12 a žádná dvě vnoučata nemají stejný počet let. Kolik vnoučat má děda Vendelín?

(*L. Hozová*)

Možné řešení. Prvočíselný rozklad čísla 2010 je $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Možnost, že by dědovi bylo $2 \cdot 67 = 134$ či dokonce více, můžeme ihned zavrhnout (a i kdybychom tak vysoký věk dědy připustili, stejně by nevedl k řešení úlohy). Dědův věk tak musí být 67 a součin věků jeho vnoučat je roven $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Najdeme všechny rozklady čísla 30 na součin různých přirozených čísel a prověříme, kdy tato čísla dávají součet 12:

$$1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6 = 1 \cdot 2 \cdot 15 = 1 \cdot 3 \cdot 10 = 1 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Patřičný součet čísel je pouze v rozkladu $1 \cdot 5 \cdot 6$. Děda Vendelín má tedy tři vnoučata, která jsou ve věku 1 rok, 5 let a 6 let.

Z6–I–5

Na táboře se dva vedoucí se dvěma táborníky a psem potřebovali dostat přes řeku a k dispozici měli jen jednu loďku o nosnosti 65 kg. Naštěstí všichni (kromě psa) dokázali loďku přes řeku převézt. Každý vedoucí vážil přibližně 60 kg, každý táborník 30 kg a pes 12 kg. Jak si měli počínat? Kolikrát nejméně musela loďka překonat řeku? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Nejprve se převezou oba hoši (1), jeden se vrátí zpět (2), pak pojede na druhý břeh vedoucí (3), zpět se přepraví druhý chlapec (4), opět oba chlapci na druhý břeh (5), jeden z nich zpět (6), druhý vedoucí se převeze (7), druhý chlapec zpět (8), nyní jeden z chlapců vezme psa a převeze ho (9), pak se vrátí pro kamaráda (10) a konečně oba hoši přejedou na druhý břeh (11) a tím jsou tam všichni.

Poznámka. Převážet lze samozřejmě i jinými způsoby, nicméně řešení s méně než 11 cestami není. To je způsobeno zejména tím, že s vedoucím v loďce už další cestující jet nemůže. Proto např. podobná úloha s jedním vedoucím a jedním táborníkem by vůbec nebyla řešitelná a k převozu jednoho vedoucího a dvou táborníků by již bylo zapotřebí 5 cest…

Z6–I–6

Karel obestavěl krabici s obdélníkovým dnem obrubou z krychliček. Použil právě 22 krychliček o hraně 1 dm, které stavěl těsně vedle sebe v jedné vrstvě. Mezi obrubou a stěnami krabice nebyla mezera a celá tato stavba měla obdélníkový půdorys. Jaké rozměry mohlo mít dno krabice? (*M. Krejčová*)

Možné řešení. Kromě čtyř rohových krychliček se všechny ostatní dotýkají jednou celou svojí stěnou některé stěny krabice a každá stěna krabice je bez mezer obestavěna řadou krychliček. Dno krabice má tedy obvod $22 - 4 = 18$ (dm), a protože $18 = 2 \cdot 9$ a $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$ jsou všechny celočíselné rozklady čísla 9 na dva sčítance, má některý z následujících rozměrů (v dm): 1×8, 2×7, 3×6, 4×5.

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Součin číslic libovolného vícemístného čísla je vždy menší než toto číslo. Pokud počítáme součin číslic daného vícemístného čísla, potom součin číslic tohoto součinu, poté znova součin číslic nového součinu atd., nutně po nějakém počtu kroků dospějeme k jednomístnému číslu. Tento počet kroků nazýváme *perzistence* čísla. Např. číslo 723 má perzistenci 2, neboť $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ (1. krok) a $4 \cdot 2 = 8$ (2. krok).

1. Najděte největší liché číslo, které má navzájem různé číslice a perzistenci 1.
2. Najděte největší sudé číslo, které má navzájem různé nenulové číslice a perzistenci 1.
3. Najděte nejmenší přirozené číslo, které má perzistenci 3.

(*S. Bednářová*)

Možné řešení. 1. V zadání není řečeno, že v tomto případě nesmíme použít nulu. Je-li jedna z číslic nulová, znamená to, že součin v prvním kroku je rovněž nula a tedy perzistence je 1. Stačí tedy sestavit největší liché číslo s navzájem různými číslicemi; tím je 9 876 543 201.

2. Tentokrát nulu použít nesmíme. Znamená to, že ciferný součin hledaného čísla musí být číslo jednomístné, přičemž se snažíme získat co největší počet navzájem různých činitelů (počet činitelů pak určuje počet číslic tohoto čísla, tedy čím více činitelů, tím vyšší číslo). Uvažujme tedy všechny možné rozklady jednomístných čísel na součiny přirozených čísel.

Protože hledáme sudé číslo, potřebujeme, aby alespoň jeden činitel ciferného součinu byl sudé číslo. To znamená, že ciferný součin je rovněž sudé číslo, takže se při hledání rozkladů stačí omezit na čísla 2, 4, 6 a 8. Dále se můžeme zaměřit pouze na rozklady, jejichž činitelem je i 1. Příslušná čísla jsou vždy o jeden řád vyšší než čísla odpovídající rozkladům bez 1.

- $2 = 1 \cdot 2$, možnosti: 12,
- $4 = 1 \cdot 4$, možnosti: 14,
- $4 = 1 \cdot 2 \cdot 2$, nelze (stejní činitelé),
- $6 = 1 \cdot 6$, možnosti: 16,
- $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, možnosti: 132, 312,
- $8 = 1 \cdot 8$, možnosti: 18,
- $8 = 1 \cdot 2 \cdot 4$, možnosti: 124, 142, 214, 412.

Z nalezených možností je nejvyšší číslo 412.

3. Tento úkol můžeme řešit tak, že postupně procházíme vícemístná čísla počínaje nejmenším (tj. 10) a zjišťujeme jejich perzistenci. První nalezené číslo s perzistencí 3 je hledané číslo.

Dvojmístná čísla obsahující číslici 1 nebo 0 mají perzistenci 1, protože příslušný ciferný součin je nejvýše 9. Podobně dvojmístná čísla obsahující číslici 2 mají perzistenci nejvýše 2, protože příslušný ciferný součin je nejvýše 18. Na základě těchto úvah stačí začít prověřovat přirozená čísla až od 33:

- 33, $3 \cdot 3 = 9$, perzistence 1,
- 34, $3 \cdot 4 = 12$, $1 \cdot 2 = 2$, perzistence 2,

- 35, $3 \cdot 5 = 15$, $1 \cdot 5 = 5$, perzistence 2,
- 36, $3 \cdot 6 = 18$, $1 \cdot 8 = 8$, perzistence 2,
- 37, $3 \cdot 7 = 21$, $2 \cdot 1 = 2$, perzistence 2,
- 38, $3 \cdot 8 = 24$, $2 \cdot 4 = 8$, perzistence 2,
- 39, $3 \cdot 9 = 27$, $2 \cdot 7 = 14$, $1 \cdot 4 = 4$, perzistence 3.

Nejmenší přirozené číslo s perzistencí 3 je 39.

Z7–I–2

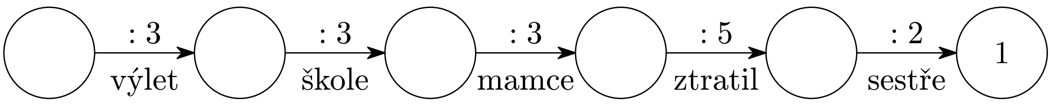
Ondra na výletě utratil $\frac{2}{3}$ peněz a ze zbytku dal ještě $\frac{2}{3}$ na školu pro děti z Tibetu. Za $\frac{2}{3}$ nového zbytku ještě koupil malý dárek pro maminku. Z děravé kapsy ztratil $\frac{4}{5}$ zbylých peněz, a když ze zbylých dal půlku malé sestřičce, zůstala mu právě jedna koruna. S jakým obnosem šel Ondra na výlet? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Počet Ondrových korun před výletem označíme x.

- Ondra na výletě utratil $\frac{2}{3}$ peněz, zbylo mu tedy $\frac{1}{3}x$ korun.
- Na školu v Tibetu dal $\frac{2}{3}$ zbylých peněz, zbylo mu $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x = \frac{1}{9}x$ korun.
- Dárek mamince stál $\frac{2}{3}$ zbytku, zbylo mu $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}x = \frac{1}{27}x$ korun.
- Z toho ztratil $\frac{4}{5}$, zbylo mu $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{27}x = \frac{1}{135}x$ korun.
- Půlku zbylých peněz dal sestře a jemu zůstala druhá půlka, tj. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{135}x = \frac{1}{270}x$, a to byla 1 koruna.

Je-li $\frac{1}{270}x = 1$, je $x = 270$. Ondra šel na výlet s obnosem 270 korun.

Jiné řešení. Úlohu je možné řešit také odzadu podle následujícího schématu:



Postupně, zprava doleva, dostáváme následující hodnoty: $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 5 = 10$, $10 \cdot 3 = 30$, $30 \cdot 3 = 90$ a $90 \cdot 3 = 270$. Ondra měl před výletem 270 korun.

Z7–I–3

Šárka prohlásila:

„Jsme tři sestry, já jsem nejmladší, Líba je starší o tři roky a Eliška o osm. Naše mamka ráda slyší, že nám všem (i s ní) je v průměru 21 let. Přitom když jsem se narodila, bylo mamce už 29.“

Před kolika lety se Šárka narodila? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Pokud věk Šárky v letech označíme x, potom Líbě je $x + 3$, Elišce $x + 8$ a mamce $x + 29$ let. Věkový průměr všech je 21 let, tzn.

$$(x + (x + 3) + (x + 8) + (x + 29)) : 4 = 21,$$

po úpravě

$$\begin{aligned} 4x + 40 &= 84, \\ x &= 11. \end{aligned}$$

Šárka se narodila před 11 lety.

Z7–I–4

Jindra měl napsáno čtyřmístné číslo. Toto číslo zaokrouhlil na desítky, na stovky a na tisíce a všechny tři výsledky zapsal pod toto číslo. Všechna čtyři čísla správně sečetl a dostal 5 443. Které číslo měl Jindra napsáno? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Celé zadání si napíšeme jako sčítání čtyř čísel. Zároveň napíšeme nuly na ta místa, kde musí být po zaokrouhlení daného čísla, na ostatní místa si napíšeme hvězdičky, které budeme postupně doplňovat.

$$\begin{array}{r} *\,*\,*\,* \\ *\,*\,*\,0 \\ *\,*\,0\,0 \\ *\,0\,0\,0 \\ \hline 5\,4\,4\,3 \end{array}$$

Nejprve si všimneme posledního sloupce, ve kterém je jediná neznámá číslice. Na místo příslušné hvězdičky můžeme doplnit pouze číslici 3, takže neznámé číslo má na místě jednotek číslici 3.

$$\begin{array}{r} *\,*\,*\,3 \\ *\,*\,*\,0 \\ *\,*\,0\,0 \\ *\,0\,0\,0 \\ \hline 5\,4\,4\,3 \end{array}$$

Třetí sloupec: Je zřejmé, že se při zaokrouhlování na desítky zaokrouhluje dolů. Proto na místě desítek u prvního a druhého čísla musí být stejné číslice. Protože sčítání na místě jednotek nebylo přes desítku, hledáme číslo, jehož dvojnásobek má na místě jednotek číslici 4. Na místě desítek může být buď a) číslice 2, nebo b) číslice 7.

a) doplníme číslici 2: Poslední dvojčíslí hledaného čísla je 23.

$$\begin{array}{r} *\,*\,2\,3 \\ *\,*\,2\,0 \\ *\,*\,0\,0 \\ *\,0\,0\,0 \\ \hline 5\,4\,4\,3 \end{array}$$

Druhý sloupec: I při zaokrouhlování na stovky zaokrouhlujeme dolů, takže na místě stovek prvního, druhého a třetího čísla je stejná číslice. Protože sčítání desítek nebylo přes desítku, opět nic nepřipočítáváme. Hledáme tedy číslo, jehož trojnásobek končí na číslici 4. Tomu vyhovuje jen číslice 8, takže poslední trojčíslí hledaného čísla je 823.

$$\begin{array}{r} *\,8\,2\,3 \\ *\,8\,2\,0 \\ *\,8\,0\,0 \\ *\,0\,0\,0 \\ \hline 5\,4\,4\,3 \end{array}$$

První sloupec: Protože $8 + 8 + 8 = 24$, připočítáváme 2. Zároveň hledané číslo zaokrouhlujeme na tisíce nahoru, takže číslice na místě tisíců u posledního čísla je o 1 větší než zbylé tři. To znamená, že čtyřnásobek číslice na místě tisíců je $5-2-1=2$. To ovšem nelze splnit, takže tato možnost nevyhovuje, tzn. číslice 2 na místě desítek být nemůže.

b) doplníme číslici 7: Poslední dvojčíslí hledaného čísla je 73.

$$\begin{array}{r} **73 \\ **70 \\ **00 \\ *000 \\ \hline 5443 \end{array}$$

Druhý sloupec: Protože $7+7=14$, připočítáváme 1 z předchozího součtu. Zároveň hledané číslo zaokrouhlujeme na stovky nahoru, takže číslice na místě stovek u třetího čísla je o 1 větší než zbylé dvě (resp. mohou být první dvě 9 a třetí 0). To znamená, že trojnásobek číslice na místě stovek končí na číslici $4-1-1=2$. Tomu vyhovuje jen číslice 4. Hledané číslo končí na trojčíslí 473.

$$\begin{array}{r} *473 \\ *470 \\ *500 \\ *000 \\ \hline 5443 \end{array}$$

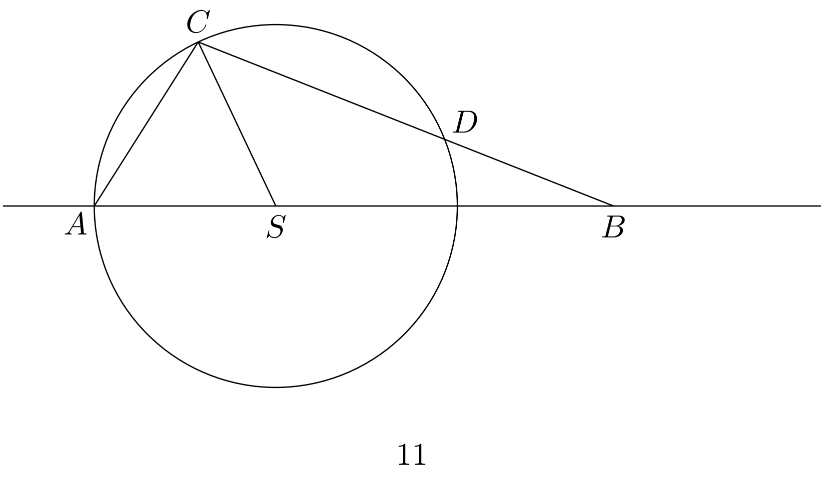
První sloupec: Hledané číslo se zaokrouhluje na tisíce dolů, takže všechny čtyři chybějící číslice jsou stejné. Má smysl doplnit na místo tisíců pouze číslici 1. Snadno ověříme, že po jejím doplnění je písemné sčítání správně.

$$\begin{array}{r} 1473 \\ 1470 \\ 1500 \\ 1000 \\ \hline 5443 \end{array}$$

Jediným řešením je číslo 1 473, takže Jindra měl napsáno číslo 1 473.

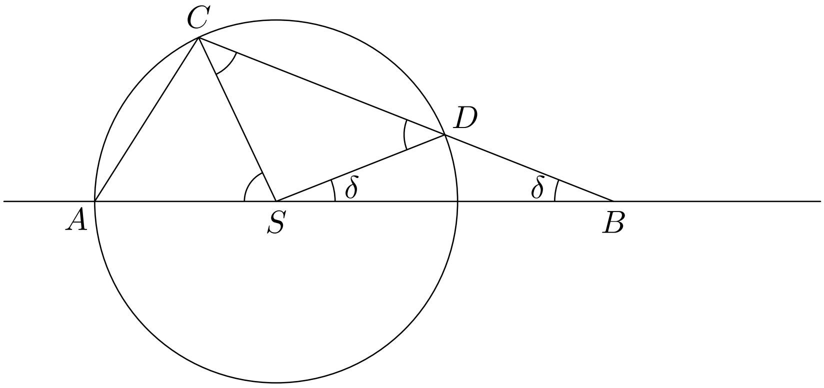
Z7–I–5

Libor narýsoval kružnici se středem S a body A, B, C, D, jak ukazuje obrázek. Zjistil, že úsečky SC a BD jsou stejně dlouhé. V jakém poměru jsou velikosti úhlů ASC a SCD?



(*L. Hozová*)

Možné řešení. Ze zadání víme, že $|SC| = |BD|$, navíc $|SC| = |SD|$, protože jde o velikost poloměru kružnice. Trojúhelníky CSD a BDS jsou proto rovnoramenné. Označme $|\sphericalangle DSB| = |\sphericalangle DBS| = \delta$, viz obrázek.



Protože součet vnitřních úhlů v trojúhelníku BDS je 180°, platí

$$\delta + \delta + |\sphericalangle BDS| = 180°,$$

a jelikož úhel BDC je přímý, platí

$$|\sphericalangle SDC| + |\sphericalangle BDS| = 180°.$$

Z uvedených dvou rovnic je zřejmé, že $|\sphericalangle SDC| = 2\delta$. Protože trojúhelník CSD je rovnoramenný, je i $|\sphericalangle SCD| = 2\delta$. Poněvadž součet vnitřních úhlů v trojúhelníku CSD je 180° a úhel BSA je přímý, dostáváme tyto rovnice:

$$2\delta + 2\delta + |\sphericalangle CSD| = 180°,$$
$$|\sphericalangle ASC| + |\sphericalangle CSD| + \delta = 180°.$$

Z nich vyplývá, že $|\sphericalangle ASC| = 3\delta$. Úloha se ptá na poměr $|\sphericalangle ASC| : |\sphericalangle SCD|$. Po dosazení dostaneme $3\delta : 2\delta$, neboli $3 : 2$.

Z7–I–6

Najděte všechna trojmístná přirozená čísla, která jsou beze zbytku dělitelná číslem 6 a ve kterých můžeme vyškrtnout jakoukoli číslici a vždy dostaneme dvojmístné přirozené číslo, jež je také beze zbytku dělitelné číslem 6. (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Číslice hledaného čísla označíme takto: x je na místě stovek, y na místě desítek a z na místě jednotek. Přirozené číslo je dělitelné šesti, právě když je součet jeho číslic roven násobku tří a číslice na místě jednotek je sudá.

Nejprve uvažujeme pouze o první části této podmínky, podle které musí být součet $x + y + z$ dělitelný třemi. Po vyškrtnutí číslice z dostaneme dvojmístné číslo, jež má být rovněž násobkem šesti. Toto číslo má součet číslic $x + y$ a ten musí být též dělitelný třemi. Vyškrtnutá číslice z tak mohla být pouze 0, 3, 6 nebo 9. Stejnou úvahou lze dojít k tomu, že také číslice x a číslice y mohou být pouze 0, 3, 6 nebo 9.

Nyní uvažujme i o druhé podmínce dělitelnosti šesti. Původní číslo a dvojmístná čísla, která z něj získáme vyškrtnutím jedné číslice, mají na místě jednotek buď z, nebo y. Číslice z a y tedy musejí být sudé. Podle zadání dostaneme po vyškrtnutí jakékoli číslice dvojmístné přirozené číslo. Toto číslo může začínat číslicí x nebo y, tyto číslice proto nemohou být nulové.

Shrneme-li vše výše uvedené, x může být 3, 6 nebo 9, y musí být 6, z může být 0 nebo 6. Všechna hledaná čísla jsou tedy 360, 366, 660, 666, 960 a 966.

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Martin má na papíře napsáno pětimístné číslo s pěti různými číslicemi a následujícími vlastnostmi:

- škrtnutím druhé číslice zleva (tj. číslice na místě tisíců) dostane číslo, které je dělitelné dvěma,
- škrtnutím třetí číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné třemi,
- škrtnutím čtvrté číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné čtyřmi,
- škrtnutím páté číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné pěti,
- neškrtne-li žádnou číslici, má číslo dělitelné šesti.

Které největší číslo může mít Martin napsáno na papíře? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Číslice Martinova čísla označíme postupně a, b, c, d, e, číslo z nich utvořené $\overline{abcde}$. Nyní si postupně rozebereme všech pět podmínek:

1. číslo $\overline{acde}$ je dělitelné dvěma, tedy číslice e je 0, 2, 4, 6 nebo 8,
2. číslo $\overline{abde}$ je dělitelné třemi, tedy součet $a+b+d+e$ je dělitelný třemi,
3. číslo $\overline{abce}$ je dělitelné čtyřmi, tedy číslo $\overline{ce}$ je dělitelné čtyřmi,
4. číslo $\overline{abcd}$ je dělitelné pěti, tedy číslice d je 0 nebo 5,
5. číslo $\overline{abcde}$ je dělitelné šesti, což znamená, že je dělitelné dvěma a třemi zároveň, tj. číslo e je sudé (víme již z 1. podmínky) a součet $a+b+c+d+e$ je dělitelný třemi.

Dáme-li dohromady druhou a pátou podmínku, dostáváme, že číslo c je rovněž dělitelné třemi. Číslice c je proto 0, 3, 6 nebo 9. Vidíme, že na číslice c, d, e jsou kladeny samostatné podmínky, zatímco na číslice a a b ne. Při hledání největšího vyhovujícího čísla budeme postupně prověřovat čísla vytvořená podle následujících zásad: číslo budeme vytvářet zleva a vždy zvolíme největší možnou číslici takovou, aby číslice byly navzájem různé, aby platily samostatné podmínky pro číslice c, d, e a aby nevzniklo číslo již prověřené. K rozhodnutí, zda takto vytvořené číslo splňuje všechny zadané podmínky, pak stačí ověřit druhou a třetí podmínku:

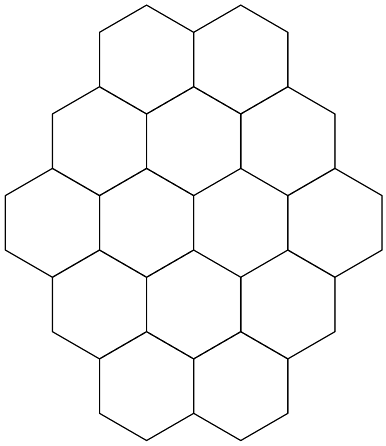
- 98 654: součet $9+8+5+4=26$ není dělitelný třemi (2. podmínka není splněna),
- 98 652: součet $9+8+5+2=24$ je dělitelný třemi (2. podmínka splněna), ale 62 není dělitelné čtyřmi (3. podmínka není splněna),
- 98 650: součet $9+8+5+0=22$ není dělitelný třemi (2. podmínka není splněna),
- 98 604: součet $9+8+0+4=21$ je dělitelný třemi (2. podmínka splněna) a 64 je dělitelné čtyřmi (3. podmínka také splněna).

Číslo 98 604 je tedy největší číslo, které může mít Martin napsáno na papíře.

Z8–I–2

Karel se snažil do prázdných polí na obrázku vepsat přirozená čísla od 1 do 14 tak, aby žádné číslo nebylo použito víckrát a součet všech čísel v každé přímé linii byl stejný. Po chvíli si uvědomil, že to není možné. Jak byste Karlovo pozorování zdůvodnili vy? (Přímou linií rozumíme skupinu všech sousedících políček, jejichž středy leží na jedné přímce.)

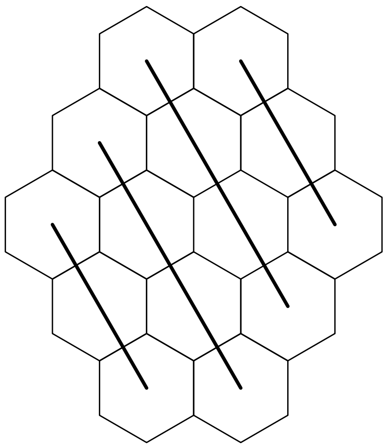
(*S. Bednářová*)



Možné řešení. Součet všech čísel, která máme do obrázku vepsat, je

$$1 + 2 + \ldots + 13 + 14 = 7 \cdot 15 = 105.$$

Přímky v následujícím obrázku určují v obrazci čtyři přímé linie tak, že každé pole patří právě jedné linii. Součet všech čísel na každé vyznačené linii by měl být stejný a čtyřnásobek tohoto součtu má být 105. Jenže číslo 105 není dělitelné čtyřmi, což znamená, že vepsat čísla do polí požadovaným způsobem skutečně nelze.



Jiné řešení. Předpokládejme, že součet všech čísel v každé přímé linii může být stejný, a označme jej p. V obrazci můžeme pomocí pěti vodorovných přímek určit pět přímých linií tak, že každé pole bude patřit právě jedné linii. Z toho usuzujeme, že součet všech doplněných čísel je $5p$. Výše uvedený obrázek ukazuje jiné rozdělení obrazce na přímé linie, podle něhož součet všech doplněných čísel je $4p$. To je ovšem spor, proto vepsat čísla do polí požadovaným způsobem nelze.

Z8–I–3

Cena knížky „Nové hádanky" byla snížena o 62,5 %. Matěj zjistil, že obě ceny (před snížením i po něm) jsou dvojmístná čísla a dají se vyjádřit stejnými číslicemi, jen v různém pořadí. O kolik Kč byla knížka zlevněna? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Původní cenu knížky v Kč budeme psát ve tvaru $10a + b$, kde a a b jsou neznámé nenulové číslice. Po zlevnění byla cena knížky $10b+a$. Snížení ceny bylo o 62,5 %, tedy na 37,5 %, což znamená, že

$$\frac{37{,}5}{100} \cdot (10a + b) = 10b + a.$$

Vzhledem k rovnosti $\frac{37{,}5}{100} = \frac{75}{200} = \frac{3}{8}$ předchozí vztah upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} \cdot (10a + b) &= 10b + a, \\ 30a + 3b &= 80b + 8a, \\ 22a &= 77b, \\ 2a &= 7b. \end{aligned}$$

Jediná jednomístná přirozená čísla vyhovující této rovnosti jsou $a = 7$ a $b = 2$. Původní cena byla 72 Kč, po zlevnění 27 Kč, knížka byla zlevněna o 45 Kč.

Z8–I–4

Rozdělte krychli o hraně 8 cm na menší shodné krychličky tak, aby součet jejich povrchů byl pětkrát větší než povrch původní krychle. Jaký bude objem malé krychle a kolik centimetrů bude měřit její hrana? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Značí-li x délku (v cm) hrany malé krychličky, bude její povrch $6x^2$. Na každé hraně dané krychle bude $\dfrac{8}{x}$ malých krychliček, celá krychle tak bude rozdělena na $\dfrac{8}{x} \cdot \dfrac{8}{x} \cdot \dfrac{8}{x} = \dfrac{8 \cdot 64}{x^3}$ krychliček. Povrch všech krychliček bude $\dfrac{8 \cdot 64}{x^3} \cdot 6x^2 = \dfrac{6 \cdot 8 \cdot 64}{x}$ a má být pětkrát větší než povrch původní krychle, který je $6 \cdot 8^2 = 6 \cdot 64$. Proto musí platit

$$\frac{6 \cdot 8 \cdot 64}{x} = 5 \cdot 6 \cdot 64,$$

odkud po úpravě dostáváme $x = \frac{8}{5} = 1{,}6$. Hrana malé krychličky bude měřit 1,6 cm a její objem bude $1{,}6^3 \doteq 4{,}1\,(\mathrm{cm}^3)$.

Z8–I–5

Klára, Lenka a Matěj si procvičovali písemné dělení se zbytkem. Jako dělence měl každý zadáno jiné přirozené číslo, jako dělitele však měli všichni stejné přirozené číslo. Lenčin dělenec byl o 30 větší než Klářin. Matějův dělenec byl o 50 větší než Lenčin. Kláře vyšel ve výsledku zbytek 8, Lence zbytek 2 a Matějovi zbytek 4. Všichni počítali bez chyby. Jaký dělitel byl žákům zadán? (*L. Šimůnek*)

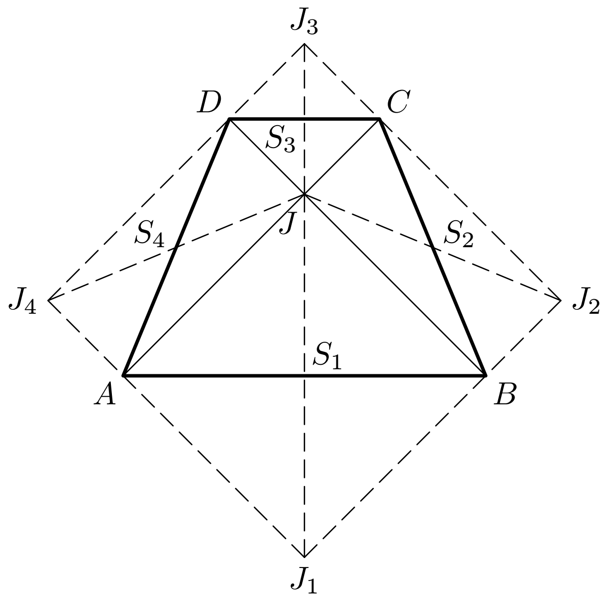
Možné řešení. Hledaný dělitel označíme x a Klářin dělenec označíme k. Lenčin dělenec je pak $k + 30$ a Matějův je $k + 80$. Vydělíme-li číslo k číslem x, dostaneme podle zadání zbytek 8. Číslo $k-8$ tedy musí být dělitelné číslem x beze zbytku. V zadání se dále uvádí, že $k+30$ dává po dělení číslem x zbytek 2 a $k+80$ dává po dělení týmž x zbytek 4. Proto $k+28$ a $k+76$ musejí být beze zbytku dělitelná číslem x.

Ukázali jsme, že čísla $k-8$ a $k+28$ jsou beze zbytku dělitelná číslem x. Je zřejmé, že i jejich rozdíl 36 musí být beze zbytku dělitelný číslem x. Stejně tak i rozdíl čísel $k+28$ a $k+76$, který je roven 48, musí být beze zbytku dělitelný číslem x. Jako x tedy připadají v úvahu pouze společní dělitelé čísel 36 a 48, a to jsou tito: 1, 2, 3, 4, 6 a 12. Číslo x musí zároveň být větší než 8, jinak by Klára nemohla dostat při dělení tímto číslem zbytek 8. Hledaný dělitel x tak musí být 12.

Z8–I–6

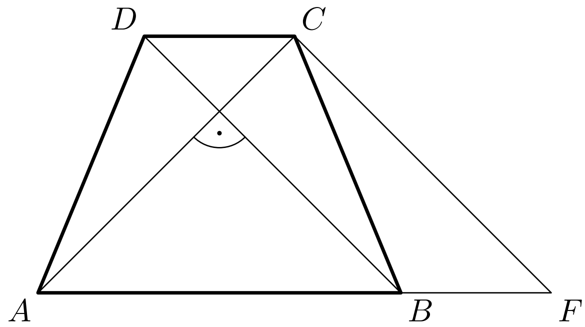
V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ jsou úhlopříčky AC a DB na sebe kolmé, jejich délka je 8 cm a délka delší základny AB je také 8 cm. Vypočítejte obsah tohoto lichoběžníku. (*M. Krejčová*)

Možné řešení. Průsečík úhlopříček lichoběžníku označíme J a středy jeho stran označíme S_1, S_2, S_3 a S_4, viz obrázek.



Ve středové souměrnosti se středem S_1 zobrazíme bod J do bodu J_1. Podobně určíme i body J_2, J_3 a J_4. Úhlopříčky čtyřúhelníků J_1BJA, J_2CJB, J_3DJC a J_4AJD se vždy vzájemně půlí a podle zadání platí $|\sphericalangle BJA| = |\sphericalangle CJB| = |\sphericalangle DJC| = |\sphericalangle AJD| = 90°$, proto tyto čtyřúhelníky musejí být obdélníky nebo čtverce. Z toho plyne, že spojením bodů A, J_1, B, J_2, C, J_3, D, J_4 a A vyznačíme čtverec $J_1J_2J_3J_4$ se stranou délky 8 cm. Jeho obsah je $8 \cdot 8 = 64\,(\mathrm{cm}^2)$ a kýžený obsah lichoběžníku $ABCD$ je zjevně poloviční, tedy $32\,\mathrm{cm}^2$.

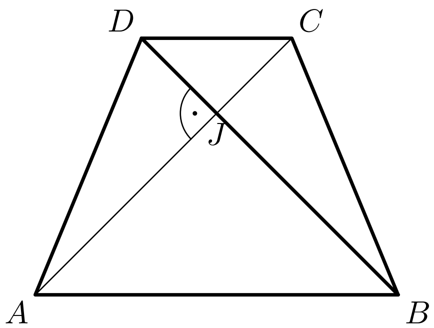
Jiné řešení. Bodem C vedeme rovnoběžku s úhlopříčkou BD a její průsečík s přímkou AB označíme F.



Trojúhelníky ACD a CFB jsou shodné podle věty sss, proto obsah lichoběžníku $ABCD$ je stejný jako obsah trojúhelníku AFC. Z konstrukce plyne, že tento trojúhelník je rovnoramenný ($|AC| = |FC| = 8\,\mathrm{cm}$) a pravoúhlý (s pravým úhlem u vrcholu C). Jeho obsah je tedy $\frac{1}{2} \cdot 8^2 = 32\,(\mathrm{cm}^2)$.

Poznámka. Všimněme si, že jsme u předchozích dvou řešení nepotřebovali délku základny AB; obsah lichoběžníku $ABCD$ je tedy na této veličině nezávislý.

Ještě jiné řešení. Průsečík úhlopříček označíme J, viz obrázek. Určíme obsahy trojúhelníků ABD a CDB a sečtením pak dostaneme obsah lichoběžníku $ABCD$.



U obou trojúhelníků známe jednu stranu, a sice BD. Ze zadání víme, že úsečky BD a AC jsou na sebe kolmé. Proto úsečky JA a JC jsou výšky zmíněných trojúhelníků kolmé na stranu BD. Vypočítejme velikosti těchto výšek. Z osové souměrnosti celého útvaru plyne, že $|AJ| = |BJ|$. Tuto velikost označíme x a určíme ji podle Pythagorovy věty v trojúhelníku AJB:

$$\begin{aligned} |AJ|^2 + |BJ|^2 &= |AB|^2, \\ x^2 + x^2 &= 8^2, \\ x &= \sqrt{32}\,(\mathrm{cm}). \end{aligned}$$

Tedy $|AJ| = \sqrt{32}\,\mathrm{cm}$, a protože $|AC| = 8\,\mathrm{cm}$, platí $|JC| = (8 - \sqrt{32})\,\mathrm{cm}$. Můžeme již spočítat obsahy trojúhelníků ABD a CDB, respektive obsah lichoběžníku $ABCD$:

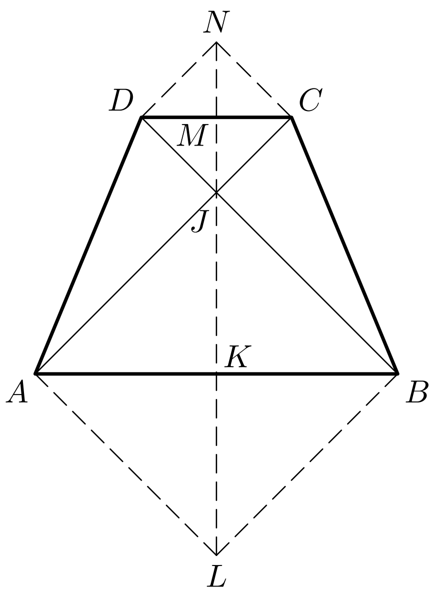
$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CDB} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{32} + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (8 - \sqrt{32}).$$

Výraz lze výhodně upravit:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (\sqrt{32} + 8 - \sqrt{32}) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámka. Pokud žáci budou průběžně vypočítávat mezivýsledky, dostanou tyto hodnoty: $|AJ| \doteq 5{,}66\,\mathrm{cm}$, $|JC| \doteq 2{,}34\,\mathrm{cm}$, $S_{ABD} \doteq 22{,}64\,\mathrm{cm}^2$, $S_{CDB} \doteq 9{,}36\,\mathrm{cm}^2$.

Ještě jiné řešení. Průsečík úhlopříček nazveme opět J. Středy základen AB a CD označíme po řadě K a M.



Obsah lichoběžníku $ABCD$ budeme počítat podle známého vzorce:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot |KM|.$$

Víme, že $|\sphericalangle AJB| = 90°$, a z osové souměrnosti rovnoramenného lichoběžníku plyne, že $|AJ| = |BJ|$. Trojúhelník ABJ lze proto doplnit na čtverec $ALBJ$: v osové souměrnosti podle osy AB zobrazíme bod J do bodu L, viz obrázek. Podobně vytvoříme i čtverec $DJCN$. Obecně platí, že čtverec se stranou a má úhlopříčku o délce $a\sqrt{2}$. Součet délek strany AJ čtverce $ALBJ$ a strany JC čtverce $DJCN$ je 8 cm. Součet délek jejich úhlopříček JL a NJ je tudíž $8\sqrt{2}$ cm, tedy

$$|NL| = 8\sqrt{2}\,\mathrm{cm}.$$

Podle obrázku postupně určíme:

$$\begin{aligned}
&|KM| = \frac{1}{2}|NL| = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm},\\
&|JL| = |AB| = 8\,\mathrm{cm},\\
&|DC| = |JN| = |NL| - |JL| = 8\sqrt{2} - 8\,(\mathrm{cm}).
\end{aligned}$$

Zjištěné délky dosadíme do výše uvedeného vzorce:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(8 + 8\sqrt{2} - 8) \cdot 4\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 32\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámka. Pokud žáci budou průběžně vypočítávat mezivýsledky, dostanou tyto hodnoty: $|KM| \doteq 5{,}66\,\mathrm{cm}$, $|DC| \doteq 3{,}31\,\mathrm{cm}$.

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Pan Vlk čekal na zastávce před školou na autobus. Z okna slyšel slova učitele:

„Jaký povrch může mít pravidelný čtyřboký hranol, víte-li, že délky všech jeho hran jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly a že jeho objem je. . . “

Toto důležité číslo pan Vlk neslyšel, protože zrovna projelo okolo auto. Za chvíli slyšel žáka hlásícího výsledek $918\,\mathrm{cm}^2$. Učitel na to řekl:

„Ano, ale úloha má celkem čtyři řešení. Hledejte dál.“

Více se pan Vlk už nedozvěděl, neboť nastoupil do svého autobusu. Protože matematika byla vždy jeho hobby, vytáhl si v autobuse tužku a papír a po čase určil i zbylá tři řešení učitelovy úlohy. Spočítejte je i vy. (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Proměnné a a v jsou přirozená čísla a představují hranu podstavy pravidelného čtyřbokého hranolu a jeho výšku. Pro rozměry, které uvažoval přihlásivší se žák, platí

$$918 = 2a^2 + 4av = 2a \cdot (a + 2v),$$

po vydělení dvěma dostaneme

$$459 = a \cdot (a + 2v).$$

Budeme hledat všechny dvojice a, v, které odpovídají tomuto vztahu. Určíme tedy všechny možné rozklady čísla 459 ($459 = 3^3 \cdot 17$) na součin dvou přirozených čísel, z nichž menší bude a a větší bude $a + 2v$. Následující tabulka ukazuje, že takové rozklady existují čtyři a každý vede k celočíselnému v. Pro všechny nalezené dvojice a, v pak spočítáme objem, který by učitel musel zadat, a jeho prvočíselný rozklad:

	a	$a + 2v$	v	$a^2 \cdot v$
1. možnost	1	459	229	$1^2 \cdot 229 = 229$
2. možnost	3	153	75	$3^2 \cdot 75 = 3^3 \cdot 5^2$
3. možnost	9	51	21	$9^2 \cdot 21 = 3^5 \cdot 7$
4. možnost	17	27	5	$17^2 \cdot 5 = 17^2 \cdot 5$

Učitel prozradil, že zadaný objem vede ke čtyřem řešením. U každého objemu v tabulce určíme, ke kolika řešením vede, tedy pro každý objem najdeme všechna možná a:

	$a^2 \cdot v$	možná a
1. možnost	229	1
2. možnost	$3^3 \cdot 5^2$	1, 3, 5, 15
3. možnost	$3^5 \cdot 7$	1, 3, 9
4. možnost	$17^2 \cdot 5$	1, 17

Vidíme, že jedině 2. možnost vede ke čtyřem hranolům. Učitel tedy zadal objem $3^3 \cdot 5^2 = 675\,(\mathrm{cm}^3)$ a první žák uvažoval tyto rozměry: $a = 3\,\mathrm{cm}$, $v = 75\,\mathrm{cm}$. Níže uvádíme, jaké další rozměry hranolu měli žáci nalézt a jaký povrch z nich měli vypočítat:

a	1	5	15
v	675	27	3
$2a^2 + 4av$	2 702	590	630

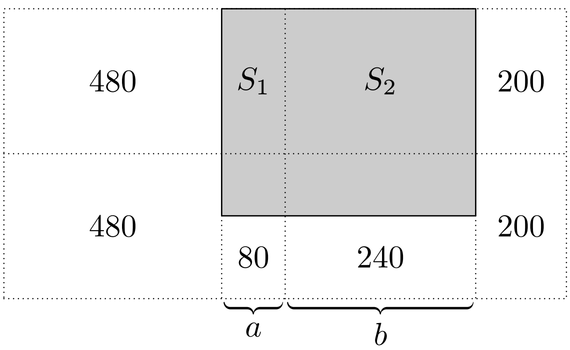
Učitel čekal na tato další tři řešení: $590\,\mathrm{cm}^2$, $630\,\mathrm{cm}^2$ a $2\,702\,\mathrm{cm}^2$.

Z9–I–2

Na obrázku jsou tečkovanou čarou znázorněny hranice čtyř stejně velkých obdélníkových parcel. Šedou barvou je vyznačena zastavěná plocha. Ta má tvar obdélníku, jehož jedna strana tvoří zároveň hranice parcel. Zapsaná čísla vyjadřují obsah nezastavěné plochy na jednotlivých parcelách, a to v m^2. Vypočítejte obsah celkové zastavěné plochy.

(*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Na obrázku prodloužíme svislé hranice zastavěné plochy, čímž na obou dolních parcelách rozdělíme volnou plochu na dvě části. Obsahy nově vzniklých obdélníků snadno odvodíme:



Obdélníky s obsahy $80\,\mathrm{m}^2$ a $240\,\mathrm{m}^2$ mají společnou stranu. Proto zbylé strany obdélníků, v obrázku označené a a b, musejí mít délky ve stejném poměru, v jakém jsou obsahy obdélníků:

$$\frac{a}{b} = \frac{80}{240} = \frac{1}{3},$$

tedy $b = 3a$. V parcelách, které jsou na obrázku nahoře, označíme obsahy zastavěných částí S_1 a S_2. Jde o dva obdélníky s jednou společnou stranou a jejich další strany mají délky a a $3a$. Obsahy obdélníků musejí být v témže poměru jako tyto délky, tedy $S_2 = 3S_1$. Parcely na obrázku nahoře mají stejný obsah, proto

$$480 + S_1 = 3S_1 + 200,$$

po úpravě dostaneme $S_1 = 140\,(\mathrm{m}^2)$. Obsah jedné parcely je $480 + 140 = 620\,(\mathrm{m}^2)$ a obsah všech čtyř je $4 \cdot 620 = 2\,480\,(\mathrm{m}^2)$. Z něj odečteme obsahy všech volných ploch a dostaneme obsah celkové zastavěné plochy:

$$2\,480 - 480 - 200 - 560 - 440 = 800\,(\mathrm{m}^2).$$

Z9–I–3

Vlčkovi lisovali jablečný mošt. Měli ho ve dvou stejně objemných soudcích, v obou téměř stejné množství. Kdyby z prvního přelili do druhého 1 litr, měli by v obou stejně, ale to by ani jeden soudek nebyl plný. Tak raději přelili 9 litrů z druhého do prvního. Pak byl první soudek úplně plný a mošt v druhém zaplňoval právě třetinu objemu. Kolik litrů moštu vylisovali, jaký byl objem soudků a kolik moštu v nich bylo původně?

(*M. Volfová*)

Možné řešení. Označme počet litrů v prvním soudku před přeléváním x, ve druhém y. Po přelití jednoho litru by bylo v prvním soudku $x - 1$ litrů, ve druhém $y + 1$ litrů a platilo by

$$x - 1 = y + 1.$$

Po přelití 9 litrů bylo v prvním soudku $x + 9$ litrů a byl plný, ve druhém $y - 9$ litrů, což tvořilo třetinu objemu soudku, tedy třetinu toho, co bylo v prvním soudku. Proto

$$x + 9 = 3 \cdot (y - 9).$$

Z první rovnice vyjádříme $x = y + 2$ a dosadíme do druhé: $y + 2 + 9 = 3y - 27$. Po úpravě dostáváme $y = 19$ a $x = 21$.

V prvním soudku bylo původně 21 litrů a ve druhém 19 litrů moštu, Vlčkovi celkem vylisovali 40 litrů moštu. Objem každého z obou soudků byl 30 litrů.

Z9–I–4

Pan Rychlý a pan Louda ve stejnou dobu vyšli na tutéž turistickou túru, jen pan Rychlý ji šel shora z horské chaty a pan Louda naopak od autobusu dole v městečku na chatu nahoru. V 10 hodin se na trase míjeli. Pan Rychlý spěchal a již ve 12 hodin byl v cíli. Naopak pan Louda postupoval pomalu, a tak dorazil k chatě až v 18 hodin. V kolik hodin pánové vyrazili na cestu, víme-li, že každý z nich šel celou dobu svou stálou rychlostí?

(*M. Volfová*)

Možné řešení. Označme rychlost (v km/h) pana Rychlého v_R a pana Loudy v_L. Dobu (v h) od vyjití do jejich setkání označíme x. Do setkání ušel pan Rychlý shora od chaty $x \cdot v_R$ (km), pan Louda zdola od autobusu $x \cdot v_L$ (km). Pan Rychlý pak šel ještě 2 h dolů k autobusu, ušel $2 \cdot v_R$ (km), pan Louda šel ještě 8 h k chatě nahoru, ušel $8 \cdot v_L$ (km).

Porovnáním odpovídajících vzdáleností získáme dvě rovnice: vzdálenost od místa, kde se pánové potkali, k autobusu je $x \cdot v_L = 2 \cdot v_R$ (km), k chatě $8 \cdot v_L = x \cdot v_R$ (km). Odtud vyjádříme

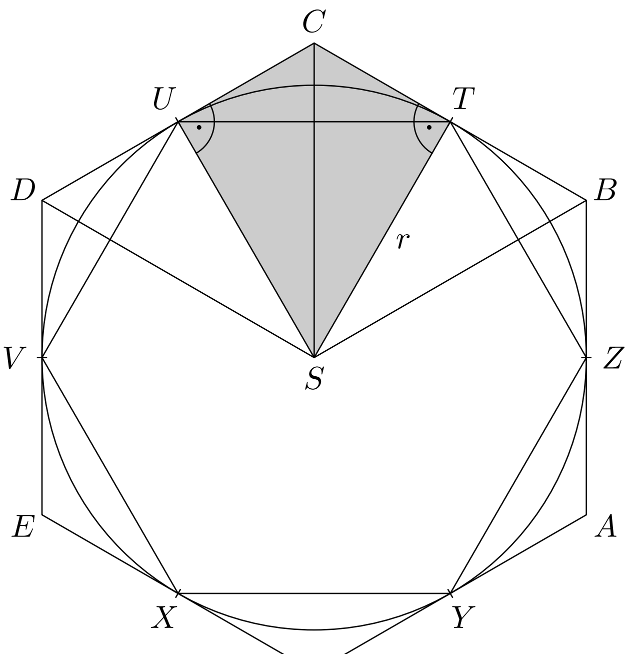
$$\frac{v_L}{v_R} = \frac{2}{x} = \frac{x}{8},$$

tedy $x^2 = 16$ a $x = 4$. Od vyjití do setkání v 10 h šli oba pánové 4 hodiny, na cestu tedy vyrazili v 6 hodin.

Z9–I–5

Kružnici se středem S a poloměrem 12 cm jsme opsali pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ a vepsali pravidelný šestiúhelník $TUVXYZ$ tak, aby bod T byl středem strany BC. Vypočítejte obsah a obvod čtyřúhelníku $TCUS$. (*M. Krejčová*)

Možné řešení. Kružnici popsanou v zadání nazvěme k a její poloměr r, přičemž platí $r = 12$ cm. Její vztahy k šestiúhelníkům lze interpretovat také tak, že kružnice k je vepsána pravidelnému šestiúhelníku $ABCDEF$ a opsána pravidelnému šestiúhelníku $TUVXYZ$, viz obrázek. Dále si uvědomme, že při sestrojování pravidelného šestiúhelníku $TUVXYZ$ můžeme podmínce v zadání, aby vrchol T ležel ve středu strany BC, vyhovět proto, že právě ve středu strany BC je bod dotyku šestiúhelníku $ABCDEF$ a kružnice k jemu vepsané. Proto i ostatní vrcholy šestiúhelníku $TUVXYZ$ leží ve středech stran šestiúhelníku $ABCDEF$.



Při řešení úlohy budeme vycházet ze známé vlastnosti pravidelného šestiúhelníku: jakékoli dva jeho sousední vrcholy a střed kružnice jemu opsané (resp. vepsané) tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Tedy trojúhelníky CSB a CSD jsou rovnostranné, navíc mají společnou stranu CS, podle které jsou osově souměrné. Bod T je středem strany BC trojúhelníku CSB, a proto je i patou jeho výšky kolmé na stranu BC. Trojúhelník CST

je tudíž pravoúhlý. Bod U, který je středem strany DC, je osově souměrný k T podle CS, tudíž trojúhelníky CST a CSU jsou shodné.

K dořešení úlohy stačí znát velikost $|TC|$, kterou vypočítáme podle Pythagorovy věty v trojúhelníku CST (přitom použijeme $|CS| = 2|TC|$):

$$\begin{aligned} |CS|^2 &= |ST|^2 + |TC|^2, \\ 4|TC|^2 &= r^2 + |TC|^2, \\ 3|TC|^2 &= r^2, \\ |TC| &= \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Čtyřúhelník $TCUS$ je tvořen dvěma shodnými trojúhelníky, určíme jeho obsah:

$$S_{TCUS} = 2 \cdot S_{CST} = |TC| \cdot |ST| = \frac{r\sqrt{3}}{3} \cdot r = \frac{r^2\sqrt{3}}{3}.$$

Obvod čtyřúhelníku $TCUS$ je

$$o_{TCUS} = 2(|TC| + |ST|) = 2\left(\frac{r\sqrt{3}}{3} + r\right) = 2r\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1\right).$$

Po dosazení $r = 12\,\mathrm{cm}$ dojdeme k výsledkům:

$$\begin{aligned} S_{TCUS} &= 48\sqrt{3} \doteq 83{,}1\,(\mathrm{cm}^2), \\ o_{TCUS} &= 8\sqrt{3} + 24 \doteq 37{,}9\,(\mathrm{cm}). \end{aligned}$$

Z9–I–6

Petr a Pavel česali v sadě jablka a hrušky. V pondělí snědl Petr o 2 hrušky více než Pavel a o 2 jablka méně než Pavel. V úterý Petr snědl o 4 hrušky méně než v pondělí. Pavel snědl v úterý o 3 hrušky více než Petr a o 3 jablka méně než Petr. Pavel snědl za oba dny 12 jablek a v úterý snědl stejný počet jablek jako hrušek. V úterý večer oba chlapci zjistili, že počet jablek, která společně za oba dny snědli, je stejně velký jako počet společně snědených hrušek. Kolik jablek snědl Petr v pondělí a kolik hrušek snědl Pavel v úterý?

(*L. Hozová*)

Možné řešení. Označme x, y odpovídající počty hrušek a jablek, jež v pondělí Pavel snědl. Podle zadání postupně a trpělivě sestavíme následující tabulku:

	pondělí	úterý
Pavel hrušek	x	$x+1$
Pavel jablek	y	$12-y$
Petr hrušek	$x+2$	$x-2$
Petr jablek	$y-2$	$15-y$

Při vyplňování tabulky jsme však zatím nepoužili následující informace:

a) Pavel snědl v úterý stejný počet jablek jako hrušek,
b) počet všech společně snědených jablek je stejný jako počet snědených hrušek.

Podle informace b) sestavíme rovnici, po jejíchž úpravách získáme hodnotu x:

$$\begin{aligned} y + (12 - y) + (y - 2) + (15 - y) &= x + (x + 1) + (x + 2) + (x - 2), \\ 25 &= 4x + 1, \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Podle informace a) též sestavíme rovnici, upravíme ji a dosadíme:

$$\begin{aligned} x + 1 &= 12 - y, \\ y &= 11 - x = 5. \end{aligned}$$

Dosazením do příslušných polí tabulky zjistíme, že Petr snědl v pondělí 3 jablka a Pavel snědl v úterý 7 hrušek.

Pro kontrolu uvádíme tabulku se všemi dosazenými hodnotami:

	pondělí	úterý
Pavel hrušek	6	**7**
Pavel jablek	5	7
Petr hrušek	8	4
Petr jablek	**3**	10

Poznámka. Při sestavování údajů v tabulce lze jistě postupovat různě a nepoužité informace mohou být různé od těch v předchozím postupu. Při stejném značení neznámých tak můžeme získat jiné dvě rovnice, jež však při správném počítání vedou ke stejnému řešení. Navíc neznámé lze také volit různě, nicméně vždy jsou potřeba alespoň dvě. Stejný počet nepoužitých informací pak určuje soustavu rovnic, kterou následně řešíme.

Jiné řešení. Pokud označíme x počet jablek, která Petr snědl v pondělí, a y počet hrušek, které Pavel snědl v úterý, pak tabulka může vypadat takto:

	pondělí	úterý
Pavel hrušek	$y - 1$	y
Pavel jablek	$12 - y$	y
Petr hrušek	$y + 1$	$y - 3$
Petr jablek	x	$y + 3$

Přitom jsme nepoužili následující informace:

a) v pondělí snědl Petr o 2 jablka méně než Pavel,
b) počet všech společně snědených jablek je stejný jako počet snědených hrušek.

Odpovídající rovnice (po jednoduché úpravě) jsou:

$$\begin{aligned} x + y &= 10, \\ -x + 3y &= 18, \end{aligned}$$

a jediným řešením této soustavy je $x = 3$ a $y = 7$.