

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pro žáky
základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií

60. ROČNÍK, 2010/2011

<http://math.muni.cz/mo>

Milí mladí přátelé,

máte rádi zajímavé matematické úlohy a chtěli byste si v jejich řešení zasoutěžit? Jestliže ano, zveme vás k účasti v matematické olympiádě (MO). Soutěž je dobrovolná a nesouvisí s klasifikací z matematiky. Mohou se jí zúčastnit žáci 5. až 9. ročníků základních škol a žáci jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií vždy ve svých kategoriích. Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka.

| ZŠ | ročník | | kategorie |
|----|---------|---------|-----------|
| | 8leté G | 6leté G | |
| 9 | 4 | 2 | Z9 |
| 8 | 3 | 1 | Z8 |
| 7 | 2 | – | Z7 |
| 6 | 1 | – | Z6 |
| 5 | – | – | Z5 |

Se souhlasem svého učitele matematiky můžete soutěžit i v některé kategorii určené pro vyšší ročník nebo v některé kategorii A, B, C, P, které jsou určeny pro studenty středních škol. Soutěžní úlohy pro kategorie A, B, C, P jsou uveřejněny v letáku Matematická olympiáda na středních školách.

Průběh soutěže

Soutěž v jednotlivých kategoriích probíhá ve dvou nebo ve třech kolech.

Kategorie Z9 má školní, okresní a krajské kolo.

Kategorie Z8, Z7, Z6 a Z5 mají školní a okresní kolo.

Školní kolo: V tomto vstupním kole soutěže, organizovaném na školách, řeší žáci ve svém volném čase (doma) šest úloh uveřejněných v tomto

letáku. Do soutěže budou zařazeni žáci, kteří odevzdají svým učitelům matematiky řešení alespoň čtyř úloh. Všem soutěžícím však doporučujeme, aby se snažili vyřešit všechny úlohy, protože v dalším průběhu soutěže mohou být zadány podobné úlohy.

Řešení úloh odevzdávejte svým učitelům matematiky v těchto termínech:

Kategorie Z5, Z9: první trojici úloh do **5. listopadu 2010** a druhou trojici úloh do **7. ledna 2011**.

Kategorie Z6 až Z8: první trojici úloh do **10. prosince 2010** a druhou trojici úloh do **4. března 2011**.

Vaši učitelé úlohy opraví a ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje*. Pak je s vámi rozeberou, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným, popřípadě i jiným řešením. Úspěšnými řešiteli školního kola se stanou ti soutěžící, kteří budou mít alespoň u čtyř úloh řešení hodnocena výborně nebo dobře.

Práce všech úspěšných řešitelů kategorií Z6 až Z9 zašle vaše škola okresní komisi MO. Ta z nich vybere nejlepší řešitele a pozve je k účasti v okresním kole soutěže. Výběr účastníků v kategorii Z5 provádějí po dohodě s okresní komisí MO školy, které okresní kolo pořádají (viz níže).

Okresní kolo se uskuteční
pro kategorii Z9 **26. ledna 2011**,
pro kategorií Z6 až Z8 **6. dubna 2011**,
pro kategorií Z5 **26. ledna 2011**.

Okresní kolo pro kategorie Z6 až Z9 se pořádá zpravidla v okresním městě, v kategorii Z5 okresní kolo probíhá na několika školách okresu pověřených pořádáním.

Žáci pozvaní do okresního kola kategorie Z9 budou řešit samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Pozvaní žáci kategorií Z6 až Z8 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 2 hodin. Pozvaní žáci kategorie Z5 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 90 minut.

Ve všech kategoriích se řešení úloh obodují a podle součtu získaných bodů se sestaví pořadí účastníků okresního kola. Účastníci, kteří získají předepsaný počet bodů (zpravidla aspoň polovinu z dosažitelných bodů), se stanou úspěšnými řešiteli okresního kola a nejlepší z nich budou odměněni.

Krajské kolo pro kategorii Z9 se bude konat **23. března 2011** v některém městě vašeho kraje. Průběh soutěže a její vyhodnocení je stejné jako při okresním kole. Nejlepší účastníci krajského kola jsou vyhlášeni jeho vítězi.

Matematickou olympiádu pořádají *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd České republiky*. Soutěž organizuje *ústřední komise MO*, v krajích ji řídí *krajské komise MO* při pobočkách JČMF a v okresech *okresní komise MO*. Na jednotlivých školách ji zajišťují pověření učitelé matematiky. Vy se obraťte na svého učitele matematiky.

Pokyny a rady soutěžícím

Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:

Karel Veselý
8. B
ZŠ, Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
okres Znojmo
2010/2011
Úloha Z8–I–3

Řešení pište tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup, podrobně vysvětlíte, jak jste uvažovali. Uvědomte si, že se hodnotí nejen výsledek, ke kterému jste došli, ale hlavně správnost úvah, které k němu vedly.

Práce, které nebudou splňovat tyto podmínky nebo nebudou odevdány ve stanoveném termínu, nebudou do soutěže přijaty.

Na ukázkou uvedeme řešení úlohy z II. kola kategorie Z8 z jednoho z předcházejících ročníků MO:

Úloha Z8–II-1. *Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Jestliže zvětšíme jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.*

Řešení. Délky stran obdélníku označíme a , b . Nový obdélník má délky stran $a + 4$, $b - 5$. Podle podmínky úlohy pro obsahy obou obdélníků platí

$$2ab = (a + 4)(b - 5).$$

Postupně upravíme:

$$\begin{array}{ll} ab - 4b + 5a = -20 & \text{(Odečteme 20,} \\ ab - 4b + 5a - 20 = -40 & \text{abychom levou} \\ (a - 4)(b + 5) = -40 & \text{stranu mohli} \\ & \text{rozložit na součin.)} \end{array}$$

Řešení najdeme rozkladem čísla -40 na 2 činitele. Přitom musí být $a > 0$, $b > 0$, a tedy $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$. Jsou dvě možnosti:

$$(-2) \cdot 20 = -40 \quad \text{a} \quad (-1) \cdot 40 = -40.$$

V prvním případě dostaneme obdélník o stranách $a = 2$, $b = 15$ s obsahem $S = 30$. Nový obdélník pak má strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, tj. $S' = 2S$.

V druhém případě dostaneme obdélník o stranách $a = 3$, $b = 35$ s obsahem $S = 105$. Nový obdélník pak má strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210$. Opět je $S' = 2S$.

KATEGORIE Z5

Z5-I-1

Vítek má napsána dvě čísla, 541 a 293. Z šesti použitých číslic má nejprve vyškrtnout dvě tak, aby součet dvou takto získaných čísel byl největší možný. Poté má z původních šesti číslic vyškrtnout dvě tak, aby rozdíl dvou takto získaných čísel byl nejmenší možný (odečítá menší číslo od většího). Které číslice má vyškrtnout? *(M. Petrová)*

Z5-I-2

V Trpasličím království měří vzdálenosti v pohádkových mílech (pm), v pohádkových sázích (ps) a v pohádkových loktech (pl). Na vstupní bráně do Trpasličího království je následující tabulka pro převody mezi jejich jednotkami a našimi:

- 1 pm = 3,85 m,
- 1 ps = 105 cm,
- 1 pl = 250 mm.

Král Trpaslík I. nechal přeměřit vzdálenost od zámecké brány k pohádkovému jezírku. Tři pozvaní zeměměřiči dospěli k těmto výsledkům: první uváděl 4 pm 4 ps 18 pl, druhý 3 pm 2 ps 43 pl a třetí 6 pm 1 ps 1 pl. Jeden z nich se však zmýlil. Jaká je vzdálenost v metrech od zámecké brány k pohádkovému jezírku? O kolik centimetrů se spletl nepřesný zeměměřič? *(M. Petrová)*

Z5-I-3

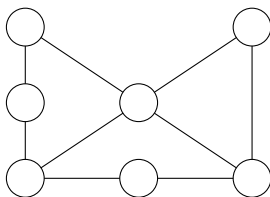
Čtyři kamarádi Adam, Mojmír a dvojčata Petr a Pavel získali v hodinách matematiky celkem 52 smajlíků, každý alespoň 1. Přitom dvojčata dohromady mají 33, ale nejméně úspěšnější byl Mojmír. Kolik jich získal Adam? *(M. Volfová)*

Z5-I-4

Pan Tik a pan Tak prodávali budíky v prodejnách Před Rohem a Za Rohem. Pan Tik tvrdil, že Před Rohem prodali o 30 budíků více než Za Rohem, zatímco pan Tak tvrdil, že Před Rohem prodali třikrát více budíků než Za Rohem. Nakonec se ukázalo, že Tik i Tak měli pravdu. Kolik budíků prodali v obou prodejnách celkem? *(L. Hozová)*

Z5-I-5

Do kroužků na obrázku doplňte čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7 tak, aby součet čísel na každé vyznačené linii byl stejný. Žádné číslo přitom nesmí být použito víckrát. (M. Smítková)

**Z5-I-6**

Paní Široká čekala večer hosty. Nejprve pro ně připravila 25 chlebičků. Pak spočítala, že by si každý host mohl vzít dva, tři by se však na všechny nedostaly. Řekla si, že kdyby vyrobila ještě 10 chlebičků, mohl by si každý host vzít tři, ale čtyři ne každý. To jí přišlo stále málo. Nakonec uchystala dohromady 52 chlebičků. Každý host by si tedy mohl vzít čtyři chlebičky, ale pět by se na všechny nedostalo. Kolik hostů paní Široká očekávala? Ona sama drží dietu a večer nikdy nejí. (L. Šimůnek)

KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Když Bořek natíral vrata garáže, přetřel omylem i stupnici nástěnného venkovního teploměru. Trubička se rtutí však zůstala nepoškozená, a tak Bořek původní stupnici přelepil páskem vlastní výroby. Na něj pečlivě vyrýsoval dílky, všechny byly stejně velké a označené čísly. Jeho dílek měl však jinou velikost než původní dílek, který představoval jeden stupeň Celsia, a i nulu Bořek umístil jinam, než kde bylo 0°C . Takto začal Bořek měřit teplotu ve vlastních jednotkách: bořcích. Když by měl teploměr ukazovat teplotu 11°C , ukazoval 2 bořky. Když by měl ukazovat -4°C , ukazoval -8 bořků. Jaká je teplota ve stupních Celsia, vidí-li Bořek na svém teploměru teplotu -2 bořky? *(L. Šimůnek)*

Z6–I–2

Začínající písničkář prodával vždy po vystoupení CD se svou hudbou. Ve čtvrtek prodal osm stejných CD. Den nato už nabízel i své nové CD a lidé si tak mohli koupit to samé jako ve čtvrtek nebo nové. V sobotu chtěli všichni posluchači nové CD a písničkář jich prodal ten den šest. V jednotlivých dnech utržil 590 Kč, 720 Kč a 840 Kč, neprozradíme však, která částka patří ke kterému dni.

- Kolik stálo starší CD?
- Kolik nových CD prodal v pátek?

(L. Šimůnek)

Z6–I–3

Vojta napsal číslo 2010 stokrát bez mezer za sebou. Kolik čtyřmístných a kolik pětímístných souměrných čísel bylo ukryto v tomto zápise? (Souměrné číslo je takové číslo, které je stejné, je-li čteno zepředu i zezadu, např. 39193.) *(L. Hozová)*

Z6–I–4

Součin věků dědy Vendelína a jeho vnoučat je 2010. Součet věků všech vnoučat je 12 a žádná dvě vnoučata nemají stejný počet let. Kolik vnoučat má děda Vendelín? *(L. Hozová)*

Z6-I-5

Na táboře se dva vedoucí se dvěma táborníky a psem potřebovali dostat přes řeku a k dispozici měli jen jednu loďku o nosnosti 65 kg. Naštěstí všichni (kromě psa) dokázali loďku přes řeku převézt. Každý vedoucí vážil přibližně 60 kg, každý táborník 30 kg a pes 12 kg. Jak si měli počínat? Kolikrát nejméně musela loďka překonat řeku? *(M. Volfová)*

Z6-I-6

Karel obestavěl krabici s obdélníkovým dnem obrubou z krychliček. Použil právě 22 krychliček o hraně 1 dm, které stavěl těsně vedle sebe v jedné vrstvě. Mezi obrubou a stěnami krabice nebyla mezera a celá tato stavba měla obdélníkový půdorys. Jaké rozměry mohlo mít dno krabice? *(M. Krejčová)*

KATEGORIE Z7

Z7–I–1

Součin číslic libovolného vícemístného čísla je vždy menší než toto číslo. Pokud počítáme součin číslic daného vícemístného čísla, potom součin číslic tohoto součinu, poté znova součin číslic nového součinu atd., nutně po nějakém počtu kroků dospějeme k jednomístnému číslu. Tento počet kroků nazýváme *perzistence* čísla. Např. číslo 723 má perzistenci 2, neboť $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ (1. krok) a $4 \cdot 2 = 8$ (2. krok).

1. Najděte největší liché číslo, které má navzájem různé číslice a perzistenci 1.
2. Najděte největší sudé číslo, které má navzájem různé nenulové číslice a perzistenci 1.
3. Najděte nejmenší přirozené číslo, které má perzistenci 3.

(S. Bednářová)

Z7–I–2

Ondra na výletě utratil $\frac{2}{3}$ peněz a ze zbytku dal ještě $\frac{2}{3}$ na školu pro děti z Tibetu. Za $\frac{2}{3}$ nového zbytku ještě koupil malý dárek pro maminku. Z děravé kapsy ztratil $\frac{4}{5}$ zbylých peněz, a když ze zbylých dal půlku malé sestřičce, zůstala mu právě jedna koruna. S jakým obnosem šel Ondra na výlet?

(M. Volfová)

Z7–I–3

Šárka prohlásila:

„Jsme tři sestry, já jsem nejmladší, Líba je starší o tři roky a Eliška o osm. Naše mamka ráda slyší, že nám všem (i s ní) je v průměru 21 let. Přitom když jsem se narodila, bylo mamce už 29.“

Před kolika lety se Šárka narodila?

(M. Volfová)

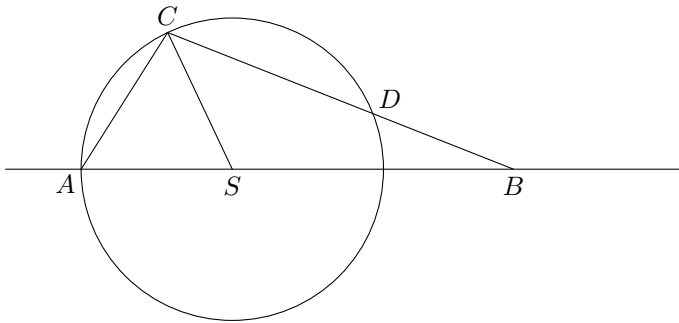
Z7–I–4

Jindra měl napsáno čtyřmístné číslo. Toto číslo zaokrouhlil na desítky, na stovky a na tisíce a všechny tři výsledky zapsal pod toto číslo. Všechna čtyři čísla správně sečetl a dostal 5 443. Které číslo měl Jindra napsáno?

(M. Petrová)

Z7-I-5

Libor narýsoval kružnici se středem S a body A, B, C, D , jak ukazuje obrázek. Zjistil, že úsečky SC a BD jsou stejně dlouhé. V jakém poměru jsou velikosti úhlů ASC a SCD ? (L. Hozová)

**Z7-I-6**

Najděte všechna trojmístná přirozená čísla, která jsou beze zbytku dělitelná číslem 6 a ve kterých můžeme vyškrtnout jakoukoli číslici a vždy dostaneme dvojmístné přirozené číslo, jež je také beze zbytku dělitelné číslem 6. (L. Šimůnek)

KATEGORIE Z8

Z8-I-1

Martin má na papíře napsáno pětimístné číslo s pěti různými číslicemi a následujícími vlastnostmi:

- škrtnutím druhé číslice zleva (tj. číslice na místě tisíců) dostane číslo, které je dělitelné dvěma,
- škrtnutím třetí číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné třemi,
- škrtnutím čtvrté číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné čtyřmi,
- škrtnutím páté číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné pěti,
- neškrtně-li žádnou číslici, má číslo dělitelné šesti.

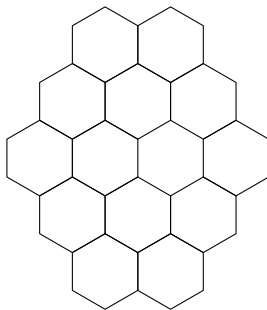
Které největší číslo může mít Martin napsáno na papíře?

(*M. Petrová*)

Z8-I-2

Karel se snažil do prázdných polí na obrázku vepsat přirozená čísla od 1 do 14 tak, aby žádné číslo nebylo použito víckrát a součet všech čísel v každé přímé linii byl stejný. Po chvíli si uvědomil, že to není možné. Jak byste Karlovo pozorování zdůvodnili vy? (Přímou linií rozumíme skupinu všech sousedících políček, jejichž středy leží na jedné přímce.)

(*S. Bednářová*)



Z8-I-3

Cena knížky „Nové hádanky“ byla snížena o 62,5%. Matěj zjistil, že obě ceny (před snížením i po něm) jsou dvojmístná čísla a dají se vyjádřit stejnými číslicemi, jen v různém pořadí. O kolik Kč byla knížka zlevněna?

(*M. Volfová*)

Z8-I-4

Rozdělte krychli o hraně 8 cm na menší shodné krychličky tak, aby součet jejich povrchů byl pětkrát větší než povrch původní krychle. Jaký bude objem malé krychle a kolik centimetrů bude měřit její hrana?

(*M. Volfová*)

Z8-I-5

Klára, Lenka a Matěj si procvičovali písemné dělení se zbytkem. Jako dělence měl každý zadáno jiné přirozené číslo, jako dělitele však měli všichni stejné přirozené číslo. Lenčin dělenec byl o 30 větší než Klářin. Matějův dělenec byl o 50 větší než Lenčin. Kláře vyšel ve výsledku zbytek 8, Lence zbytek 2 a Matějovi zbytek 4. Všichni počítali bez chyby. Jaký dělitel byl žákům zadán?

(*L. Šimůnek*)

Z8-I-6

V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ jsou úhlopříčky AC a DB na sebe kolmé, jejich délka je 8 cm a délka delší základny AB je také 8 cm. Vypočítejte obsah tohoto lichoběžníku.

(*M. Krejčová*)

KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Pan Vlk čekal na zastávce před školou na autobus. Z okna slyšel slova učitele:

„Jaký povrch může mít pravidelný čtyřboký hranol, víte-li, že délky všech jeho hran jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly a že jeho objem je...“

Toto důležité číslo pan Vlk neslyšel, protože zrovna projelo okolo auto. Za chvíli slyšel žáka hlásícího výsledek 918 cm^3 . Učitel na to řekl:

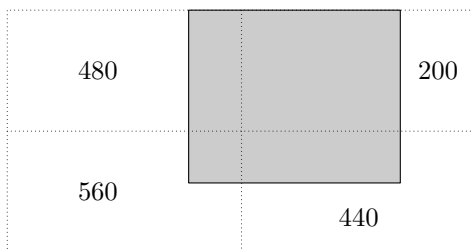
„Ano, ale úloha má celkem čtyři řešení. Hledejte dál.“

Více se pan Vlk už nedozvěděl, neboť nastoupil do svého autobusu. Protože matematika byla vždy jeho hobby, vytáhl si v autobuse tužku a papír a po čase určil i zbylá tři řešení učitelovy úlohy. Spočítejte je i vy.

(L. Šimůnek)

Z9–I–2

Na obrázku jsou tečkovanou čarou znázorněny hranice čtyř stejně velkých obdélníkových parcel. Šedou barvou je vyznačena zastavěná plocha.



Ta má tvar obdélníku, jehož jedna strana tvoří zároveň hranice parcel. Zapsaná čísla vyjadřují obsah nezastavěné plochy na jednotlivých parcelách, a to v m^2 . Vypočítejte obsah celkové zastavěné plochy. (L. Šimůnek)

Z9–I–3

Vlčkovi lisovali jablečný mošt. Měli ho ve dvou stejně objemných soudcích, v obou téměř stejné množství. Kdyby z prvního přelili do druhého 1 litr, měli by v obou stejně, ale to by ani jeden soudek nebyl plný. Tak raději přelili 9 litrů z druhého do prvního. Pak byl první soudek úplně plný a mošt v druhém zaplňoval právě třetinu objemu. Kolik litrů moštu

vylišovali, jaký byl objem soudků a kolik moštu v nich bylo původně?
(*M. Volfová*)

Z9–I–4

Pan Rychlý a pan Louda ve stejnou dobu vyšli na tutéž turistickou túru, jen pan Rychlý ji šel shora z horské chaty a pan Louda naopak od autobusu dole v městečku na chatu nahoru. V 10 hodin se na trase míjeli. Pan Rychlý spěchal a již ve 12 hodin byl v cíli. Naopak pan Louda postupoval pomalu, a tak dorazil k chatě až v 18 hodin. V kolik hodin pánové vyrazili na cestu, víme-li, že každý z nich šel celou dobu svou stálou rychlostí?
(*M. Volfová*)

Z9–I–5

Kružnici se středem S a poloměrem 12 cm jsme opsali pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ a vepsali pravidelný šestiúhelník $TUVXYZ$ tak, aby bod T byl středem strany BC . Vypočítejte obsah a obvod čtyřúhelníku $TCUS$.
(*M. Krejčová*)

Z9–I–6

Petr a Pavel česali v sadě jablka a hrušky. V pondělí snědl Petr o 2 hrušky více než Pavel a o 2 jablka méně než Pavel. V úterý Petr snědl o 4 hrušky méně než v pondělí. Pavel snědl v úterý o 3 hrušky více než Petr a o 3 jablka méně než Petr. Pavel snědl za oba dny 12 jablek a v úterý snědl stejný počet jablek jako hrušek. V úterý večer oba chlapci zjistili, že počet jablek, která společně za oba dny snědli, je stejně velký jako počet společně snědených hrušek. Kolik jablek snědl Petr v pondělí a kolik hrušek snědl Pavel v úterý?
(*L. Hozová*)