III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Paní učitelka potřebovala vymyslet příklady na rovnice do písemky. Proto si vypsala všechny rovnice tvaru

$$a \cdot x + b = 13,$$

kde a a b jsou jednomístná přirozená čísla. Ze všech vybrala ty rovnice, jejichž kořen x byl 3. Do každé skupiny dala jednu rovnici. Kolik skupin mohlo být nejvíce? (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Víme, že $x = 3$ je řešením uvedené rovnice, proto platí rovnost

$$a \cdot 3 + b = 13.$$

Aby a, b byla přirozená čísla, musí a být buď 1, 2, 3, nebo 4 (pro $a = 5$ dostáváme $5 \cdot 3 = 15 > 13$ a b by muselo být záporné, což nelze). Nyní dosadíme jednotlivé hodnoty a do rovnice a dopočítáme příslušná b:

- $a = 1$, $b = 10$,
- $a = 2$, $b = 7$,
- $a = 3$, $b = 4$,
- $a = 4$, $b = 1$.

Vidíme, že podmínkám ze zadání nevyhovuje případ $a = 1$, $b = 10$. Existují tak právě tři dvojice (a, b), které řeší úlohu: $(2, 7)$, $(3, 4)$ a $(4, 1)$. Paní učitelka tak mohla utvořit nejvýše tři skupiny.

Hodnocení. 1 bod za dosazení kořene do rovnice; 2 body za nalezení všech tří řešení; 3 body za zdůvodnění, proč řešení není více.

Z9–III–2

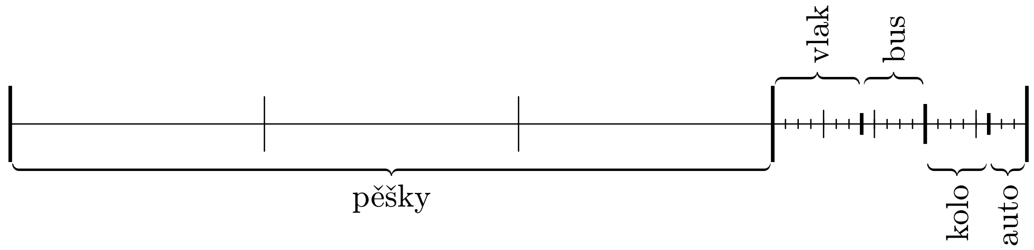
Do naší školy se žáci dopravují různě. Domácí chodí pěšky. Počet domácích a dojíždějících žáků je v poměru 3 : 1. U dojíždějících je poměr počtu těch, kteří využívají veřejnou dopravu, a těch, kteří jezdí sami na kole nebo s rodiči autem, 3 : 2. U veřejné dopravy je poměr počtu těch, kteří jezdí vlakem, a těch, kteří jezdí autobusem, 7 : 5. Dále víme, že poměr počtu těch, kteří dojíždějí na kole, k počtu těch, které vozí rodiče autem, je 5 : 3. O kolik více žáků dojíždí vlakem oproti těm, které vozí rodiče, když veřejnou dopravou jich jezdí 24? Kolik žáků má naše škola? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Těch, kteří jezdí veřejnou dopravou, je 24 a tvoří 3 díly z počtu dojíždějících. Zbylé 2 díly, které přísluší neveřejné dopravě, tedy odpovídají 16 žákům ($\frac{2}{3}$ z 24 je 16). Všech dojíždějících je $24 + 16 = 40$. Dojíždějící tvoří 1 díl ze všech žáků školy, domácích je třikrát více, tj. 120. Všech žáků je tedy $40 + 120 = 160$.

24 dětí dojíždějících veřejnou dopravou je rozděleno na cestující vlakem (7 dílů) a autobusem (5 dílů); vlakem tedy jezdí 14 dětí ($\frac{7}{12}$ z 24 je 14) a autobusem 10 ($\frac{5}{12}$ z 24 je 10). 16 žáků, kteří jezdí neveřejnou dopravou, se dělí na ty, kteří jezdí na kole (5 dílů), a ty vožené rodiči (3 díly); na kole tedy dojíždí 10 dětí ($\frac{5}{8}$ z 16 je 10), s rodiči autem 6 ($\frac{3}{8}$ z 16 je 6).

Závěr: škola má celkem 160 žáků, z nichž vlakem dojíždí o 8 žáků víc, než kolik jich vozí rodiče autem ($14 - 6 = 8$).

Jiné řešení. Načrtneme úsečku představující všechny žáky školy a budeme ji rozdělovat podle zadaných poměrů, viz obrázek.



Kromě poměrů je v zadání jediný číselný údaj, a to že vlakem a autobusem jezdí celkem 24 žáků. Z obrázku vyvodíme, že dojíždějících žáků je $\frac{5}{3} \cdot 24 = 40$ a všech žáků je $4 \cdot 40 = 160$.

Nejmenší dílky, na které je rozdělena část úsečky odpovídající veřejné dopravě, představují $24 : 12 = 2$ žáky. I část úsečky odpovídající neveřejné dopravě je rozdělena na takto velké dílky — dílky jsou stejné, protože jednou znázorňují dvanáctinu tří dílů, jednou osminu dvou dílů a $\frac{3}{12} = \frac{2}{8}$. Část úsečky odpovídající vlaku je o 4 takové dílky větší než ta odpovídající autu. Vlakem se tedy do školy dopravuje o $4 \cdot 2 = 8$ žáků více než autem.

Hodnocení. 3 body za celkový počet žáků; 3 body za rozdíl mezi počty žáků dojíždějících vlakem a autem.

Z9–III–3

Dostali jsme krychli, která měla délku hrany vyjádřenou v centimetrech celým číslem větším než 2. Všechny její stěny jsme obarvili na žluto a poté jsme ji rozřezali beze zbytku na krychličky o hraně délky 1 cm. Tyto krychličky jsme roztřídili do čtyř hromádek. V první byly krychličky s jednou žlutou stěnou, ve druhé se dvěma žlutými stěnami a ve třetí se třemi. Ve čtvrté hromádce pak byly krychličky bez žluté stěny. Určete délku hrany původní krychle, pokud víte, že aspoň jedno z následujících tvrzení je pravdivé:

- Počty kostek v první a čtvrté hromádce byly v poměru 4 : 9.
- V první hromádce bylo třikrát více kostek než ve druhé. (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Délku hrany původní krychle v centimetrech označíme $a+2$, kde a je přirozené číslo. Každé stěně původní krychle odpovídá a^2 krychliček s právě jednou obarvenou stěnou, proto je takových krychliček celkem $6a^2$. Na každé hraně původní krychle jsme dostali a krychliček s právě dvěma obarvenými stěnami. Původní krychle měla 12 hran, proto je takových krychliček celkem $12a$. Krychliček, které nemají žádnou obarvenou stěnu, je a^3.

První tvrzení v zadání vyjadřuje tato rovnice:

$$\frac{6a^2}{a^3} = \frac{4}{9}.$$

Po zkrácení zlomku nenulovým výrazem a^2 dostaneme

$$\frac{6}{a} = \frac{4}{9},$$

tedy $a = 13{,}5$. Zadání úlohy předpokládá celočíselnou délku hrany krychle, zde však délka hrany vychází $13{,}5 + 2 = 15{,}5$ (cm). Vidíme, že uvedený poměr počtu krychliček nemůžeme po rozřezání žádné krychle nikdy dostat.

První tvrzení ze zadání není pravdivé, musí tedy platit druhé, jež je vyjádřeno rovnicí

$$\frac{6a^2}{12a} = \frac{3}{1}.$$

Po zkrácení zlomku nenulovým výrazem $6a$ dostaneme

$$\frac{a}{2} = \frac{3}{1},$$

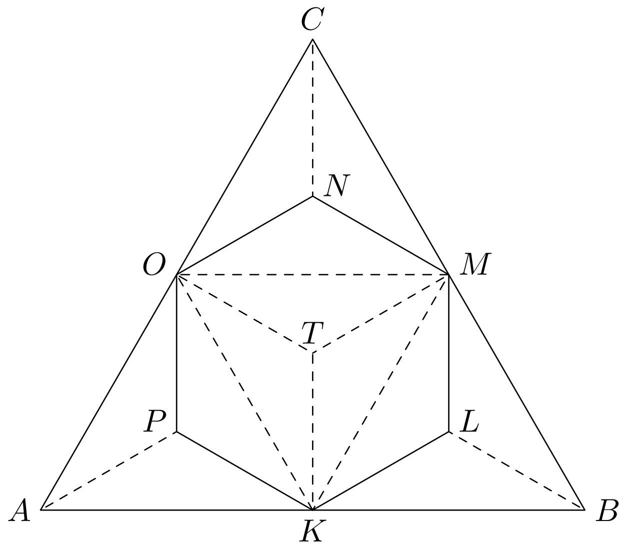
tedy $a = 6$. Délka hrany původní krychle byla $6 + 2 = 8$ (cm).

Hodnocení. 3 body za vyjádření počtu krychliček v první, druhé a čtvrté hromádce; 2 body za délky hran podle prvního a druhého tvrzení; 1 bod za správný závěr.

Z9–III–4

Do rovnostranného trojúhelníku ABC je vepsán pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$ tak, že body K, M, O leží po řadě ve středech stran AB, BC a AC. Vypočtěte obsah šestiúhelníku $KLMNOP$, jestliže obsah trojúhelníku ABC je $60\,\mathrm{cm}^2$. (*K. Pazourek*)

Možné řešení. Vepišme šestiúhelník $KLMNOP$ do trojúhelníku ABC předepsaným způsobem.



Vzhledem k tomu, že oba útvary jako celek jsou osově souměrné podle tří os souměrnosti, leží těžiště šestiúhelníku a těžiště trojúhelníku v jednom bodě, který označíme T. Střední příčky trojúhelníku ABC spolu s úsečkami KT, MT a OT rozdělí šestiúhelník $KLMNOP$ na šest shodných rovnoramenných trojúhelníků — pro zdůvodnění tohoto tvrzení si stačí uvědomit shodnost příslušných stran těchto trojúhelníků.

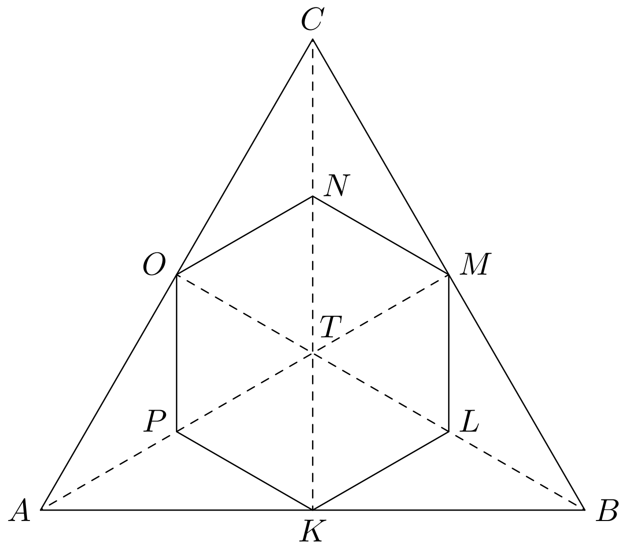
Dále i zbývající části trojúhelníku ABC můžeme rozdělit na šest trojúhelníků shodných s předchozími šesti trojúhelníky. Jako možné zdůvodnění tohoto tvrzení dokážeme shodnost trojúhelníků PKO a PKA podle věty *sus*: Stranu PK mají oba trojúhelníky společnou. Strany KO a KA mají stejnou délku, protože jde o střední příčku rovnostranného trojúhelníku ABC a o polovinu jeho strany. Úhel PKO je čtvrtinou vnitřního úhlu PKL pravidelného šestiúhelníku $KLMNOP$, a tak měří 30°. Úhel PKA je spolu s úhlem LKB doplňkem úhlu PKL do přímého úhlu, a proto měří také 30°.

Díky rozdělení trojúhelníku ABC na těchto dvanáct shodných trojúhelníků vidíme, že poměr obsahů šestiúhelníku $KLMNOP$ a trojúhelníku ABC je $6 : 12 = 1 : 2$, tudíž obsah šestiúhelníku $KLMNOP$ je

$$S = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30\,(\mathrm{cm}^2).$$

Hodnocení. 1 bod za rozdělení šestiúhelníku na výše uvedené trojúhelníky a zdůvodnění jejich vzájemné shodnosti; 3 body za jakékoli zdůvodnění, že zbývající trojúhelníky tvořící trojúhelník ABC jsou s předchozími shodné; 1 bod za porovnání obsahů obou zadaných útvarů; 1 bod za výsledek.

Jiné řešení. Vepišme šestiúhelník $KLMNOP$ do trojúhelníku ABC předepsaným způsobem.



Vzhledem k tomu, že oba útvary jako celek jsou osově souměrné podle tří os souměrnosti, leží těžiště šestiúhelníku a těžiště trojúhelníku v jednom bodě, který označíme T. Na obrázku pak vidíme, že se pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$ skládá z šesti shodných trojúhelníků a zbylá část trojúhelníku ABC se skládá z šesti jiných shodných trojúhelníků. Dokážeme, že tyto trojúhelníky mají s předchozími stejný obsah, a to na příkladě trojúhelníků NTO a CNO:

Úsečka KC je těžnice trojúhelníku ABC. Z vlastností těžiště a těžnic vyplývá, že $|TC| = 2 \cdot |KT|$. Dále v pravidelném šestiúhelníku $KLMNOP$ platí $|NT| = |KT|$. Teď je již zřejmé, že $|CN| = |NT|$. Trojúhelníky NTO a CNO mají tedy stejně velké strany NT a CN a shodují se i v příslušné výšce, proto musí mít stejný obsah.

Díky rozdělení trojúhelníku ABC na dvanáct trojúhelníků o stejném obsahu vidíme, že poměr obsahů šestiúhelníku $KLMNOP$ a trojúhelníku ABC je $6 : 12 = 1 : 2$, tudíž obsah šestiúhelníku $KLMNOP$ je

$$S = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30\,(\mathrm{cm}^2).$$

Hodnocení. 2 body za vysvětlení, že $|CN| = |NT|$; 2 body za vysvětlení, že trojúhelníky NTO a CNO mají stejné obsahy; 1 bod za porovnání obsahů obou zadaných útvarů; 1 bod za výsledek.

Ještě jiné řešení. Vzhledem k tomu, že oba útvary jako celek jsou osově souměrné podle tří os souměrnosti, leží těžiště šestiúhelníku a těžiště trojúhelníku v jednom bodě, který označíme T. Úsečka KC je těžnice trojúhelníku ABC a KT její třetina. Označme b délku strany trojúhelníku ABC. Z Pythagorovy věty uplatněné na pravoúhlý trojúhelník KBC pak plyne

$$|KT| = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{6}b.$$

Protože šestiúhelník $KLMNOP$ se skládá ze šesti shodných rovnostranných trojúhelníků s délkou strany $|KT|$, je jeho obsah

$$S_1 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}b\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{36}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}b^2.$$

Obsah trojúhelníku ABC je $S_2 = \frac{1}{4}\sqrt{3}b^2$. Porovnáním S_1 a S_2 dostaneme, že obsah šestiúhelníku $KLMNOP$ je poloviční oproti obsahu trojúhelníku ABC, tudíž je roven $30\,\mathrm{cm}^2$.

Hodnocení. 1 bod za vysvětlení, že KT je třetina KC; 1 bod za vyjádření obsahu trojúhelníku ABC; 2 body za vyjádření obsahu šestiúhelníku pomocí stejné neznámé; 1 bod za poměr obsahů obou útvarů nebo analogický poznatek; 1 bod za výsledek.

Poznámka. Na základě posledně uvedeného řešení a díky zadanému obsahu trojúhelníku ABC mohou žáci postupně vypočítat $b \doteq 11{,}8\,\mathrm{cm}$, $|KT| \doteq 3{,}4\,\mathrm{cm}$ a $S_2 \doteq 30{,}0\,\mathrm{cm}$. I takové řešení lze ohodnotit plným počtem bodů, pokud je i zdůvodnění v pořádku.