

## II. kolo kategorie Z8

## Z8-II-1

Průměrný věk rodiny Kebulových, kterou tvoří otec, matka a několik dětí, je 18 let. Přitom průměrný věk rodiny bez tatínka, kterému je 38 let, je 14 let. Kolik dětí mají Kebulovi? *(L. Hozová)*

**Možné řešení.** Počet členů této rodiny označíme  $n$ . Součet věků všech členů je roven součtinu průměrného věku rodiny a počtu členů, tedy  $18 \cdot n$ . Rodina bez tatínka má  $n - 1$  členů a součet věků těchto členů je  $14 \cdot (n - 1)$ . Víme, že tento součet je o 38 menší než součet věků všech členů. Docházíme tedy k rovnici

$$18 \cdot n = 14 \cdot (n - 1) + 38,$$

po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} 4n &= 24, \\ n &= 6. \end{aligned}$$

Celá rodina má 6 členů, Kebulovi tedy mají 4 děti.

**Hodnocení.** 2 body za sestavení rovnice; 2 body za zdůvodnění tohoto sestavení; 1 bod za vyřešení rovnice; 1 bod za správný závěr.

**Jiné řešení.** Pomineme-li, že mezi dětmi a rodiči musí být určitý věkový rozestup, lze si po přečtení první věty v zadání představit rodinu, kterou tvoří jen 18letí členové. Po přečtení druhé věty můžeme svou představu upravit a v rodině vidět 38letého tatínka a zbytek členů 14letých. Věk tatínka jsme přitom zvýšili o 20, věk ostatních členů snížili vždy o 4. Aby při upravování naší představy zůstal součet věků všech členů rodiny stejný, musí být počet členů rodiny bez tatínka  $20 : 4 = 5$ . Jedním z nich je maminka, děti tak musejí být 4.

**Hodnocení.** 6 bodů.

## Z8-II-2

Kolik existuje šestimístných přirozených čísel, která mají na místě statisíců číslici 1, na místě tisíců číslici 2 a na místě desítek číslici 3 a jsou beze zbytku dělitelná číslem 45? *(L. Šimůnek)*

**Možné řešení.** Číslo je dělitelné číslem 45, právě když je dělitelné čísly 5 i 9. Na místě jednotek tedy musí být číslice 0 nebo 5 a jeho ciferný součet musí být násobkem devíti.

Nejprve určíme počet hledaných čísel, která mají na místě jednotek číslici 0. Tato čísla označíme jako  $\overline{1A2B30}$  a jejich ciferný součet je pak roven  $6 + A + B$ . Má-li být tento součet násobkem devíti a přihlídneme-li k tomu, že neznámé  $A$  a  $B$  označují číslice 0 až 9, může být ciferný součet roven buď 9, nebo 18. V prvním případě platí  $A + B = 3$ , ve druhém  $A + B = 12$ . Následující tabulky ukazují, kolik lze nalézt dvojic číslic dávajících součet 3, respektive 12:

A	3	2	1	0
B	0	1	2	3

A	9	8	7	6	5	4	3
B	3	4	5	6	7	8	9

Čísel tvaru  $\overline{1A2B30}$  dělitelných číslem 45 tedy existuje  $4 + 7 = 11$ .

Nyní určíme počet hledaných čísel, která mají na místě jednotek číslici 5. Ta označíme jako  $\overline{1C2D35}$  a jejich ciferný součet je pak  $11 + C + D$ . Podobně jako v předchozí části úlohy zjišťujeme, že buď musí platit  $C + D = 7$ , nebo  $C + D = 16$ . Sestavíme opět tabulky:

C	7	6	5	4	3	2	1	0
D	0	1	2	3	4	5	6	7

C	9	8	7
D	7	8	9

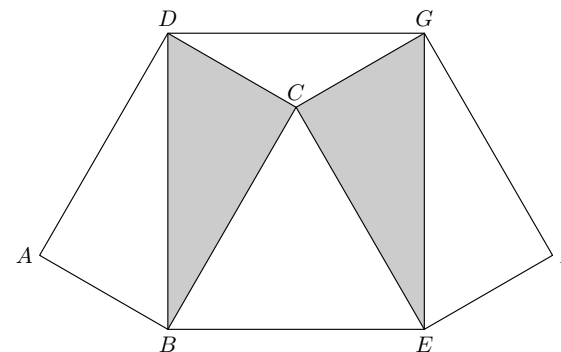
Čísel tvaru  $\overline{1C2D35}$  dělitelných číslem 45 tedy existuje  $8 + 3 = 11$ . Čísel odpovídajících zadání je celkem  $11 + 11 = 22$ .

**Poznámka.** Žáci také mohou v úvodu rozdělit hledaná čísla do skupin s ciferným součtem 9, 18 a 27. Ve skupině s ciferným součtem 9 může být na místě jednotek pouze číslice 0, ve skupině s ciferným součtem 27 může být na místě jednotek pouze číslice 5 a ve skupině s ciferným součtem 18 mohou být na místě jednotek obě tyto číslice.

**Hodnocení.** 1 bod za podmínku dělitelnosti číslem 45; 1 bod za rozdělení hledaných čísel do skupin; 4 body za správné určení čísel v každé skupině.

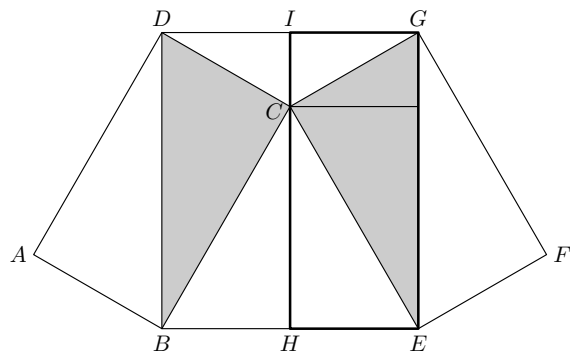
## Z8-II-3

Na následujícím obrázku je šestiúhelník  $ABEFGD$ . Čtyřúhelníky  $ABCD$  a  $EFCD$  jsou shodné obdélníky a čtyřúhelník  $BEGD$  je také obdélník. Určete poměr obsahů bílé a šedé části šestiúhelníku, jestliže  $|AB| = 5$  cm a trojúhelník  $BEC$  je rovnostranný.



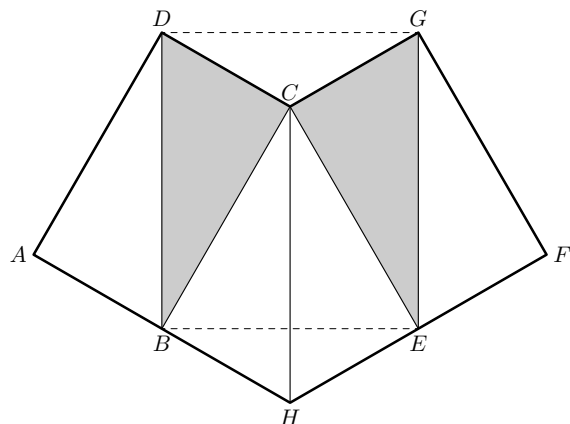
*(K. Pazourek)*

**Možné řešení.** Označme středy úseček  $BE$  a  $GD$  postupně  $H$  a  $I$ . Potom obdélník  $HEGI$  tvoří polovinu obdélníku  $BEGD$  a bod  $C$  leží na jeho straně  $HI$ . Tento obdélník ještě rozdělíme kolmicí spuštěnou z bodu  $C$ .



Nyní je zřejmé, že poměr bílé a šedé plochy v obdélníku  $HEGI$  je  $1 : 1$ . Trojúhelníky  $CGE$  a  $EFG$  jsou shodné, a proto jsou obsahy bílých a šedých ploch v pětiúhelníku  $HEFGI$  v poměru  $2 : 1$ . Celý obrázek je symetrický podle osy  $HI$ , tudíž poměr obsahů bílých a šedých částí šestiúhelníku  $ABEFGD$  je stejný.

**Poznámka.** Lze řešit i vhodným posunutím trojúhelníku  $DGC$  a následným rozdělením vzniklého útvaru na šest shodných trojúhelníků, viz obrázek.



**Hodnocení.** 5 bodů za správný a zdůvodněný postup; 1 bod za výsledek.

**Jiné řešení.** Protože trojúhelník  $BEC$  je rovnostranný, jsou všechny jeho vnitřní úhly  $60^\circ$ . Odtud plyne, že v trojúhelníku  $CDB$  měří vnitřní úhly  $30^\circ$ ,  $90^\circ$  a  $60^\circ$ , proto je tento trojúhelník polovinou rovnostranného trojúhelníku se stranou délky  $2 \cdot |CD| = 2 \cdot |AB| = 10$  cm. Proto je  $|BD| = 10$  cm a z Pythagorovy věty spočítáme délku strany  $BC$  v trojúhelníku  $CDB$ :

$$|BC| = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Obsah trojúhelníku  $CDB$  je tedy roven

$$S_{CDB} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5 = \frac{25}{2}\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Stejný obsah mají i trojúhelníky  $ABD$ ,  $CGE$  a  $FEG$ , protože jsou s trojúhelníkem  $CDB$  shodné. Protože je trojúhelník  $BEC$  rovnostranný, je  $|BE| = |BC|$ , a spočítáme obsah obdélníku  $BEGD$ :

$$S_{BEGD} = |BE| \cdot |BD| = 5\sqrt{3} \cdot 10 = 50\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Potom obsah bílé části šestiúhelníku  $ABEFGD$  je

$$\begin{aligned} S_{\text{bílá}} &= S_{ABD} + (S_{BEGD} - S_{CDB} - S_{CGE}) + S_{FEG} = \\ &= S_{CDB} + (S_{BEGD} - S_{CDB} - S_{CDB}) + S_{CDB} = \\ &= S_{BEGD} = 50\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Obsah šedé části šestiúhelníku  $ABEFGD$  je

$$S_{\text{šedá}} = S_{CDB} + S_{CGE} = 2 \cdot S_{CDB} = 25\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Proto poměr obsahů bílých a šedých částí šestiúhelníku je

$$S_{\text{bílá}} : S_{\text{šedá}} = 50\sqrt{3} : 25\sqrt{3} = 2 : 1.$$

**Hodnocení.** 1 bod za výpočet délky úsečky  $BC$ ; po 1 bodu za výpočty obsahů trojúhelníku  $CDB$  a obdélníku  $BEGD$ ; po 1 bodu za stanovení obsahů šedých a bílých částí; 1 bod za spočtení poměru obsahů bílé a šedé plochy (jednotlivé výpočty musí být zdůvodněny).

**Poznámka.** Přibližné hodnoty předchozích veličin vyjádřené pomocí tabulek bez kalkulačky jsou:  $|BC| \doteq 8,66$  cm,  $S_{CDB} \doteq 21,65$  cm<sup>2</sup>,  $S_{BEGD} = S_{\text{bílá}} \doteq 86,6$  cm<sup>2</sup>,  $S_{\text{šedá}} \doteq 43,3$  cm<sup>2</sup> a poměr  $S_{\text{bílá}} : S_{\text{šedá}} \doteq 2 : 1$ . Jestliže řešitel počítá s přibližnými hodnotami a v jinak zcela správném řešení si na konci neuvědomí, že jím vypočtený poměr  $2 : 1$  je hodnota toliko přibližná, udělte mu celkem 5 bodů.