II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

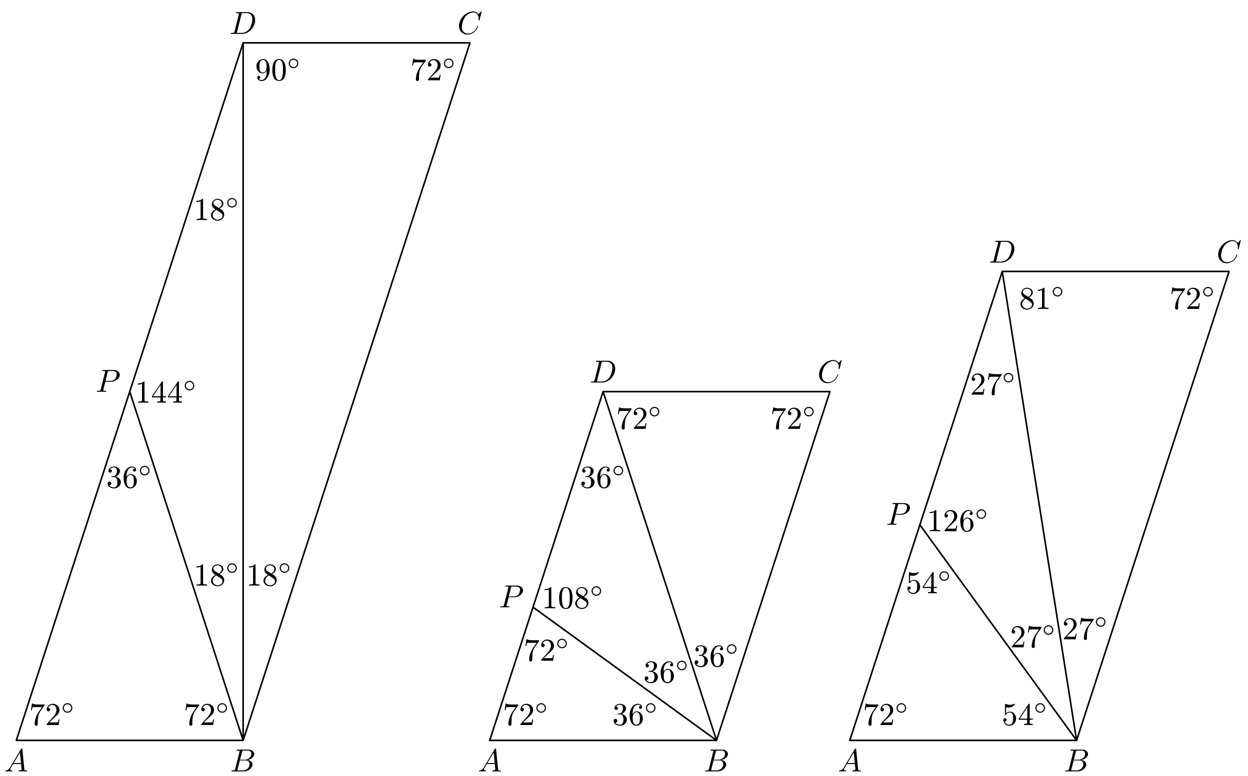
Máme rovnoběžník $ABCD$ ($|AB| \neq |BC|$) s vnitřním úhlem $72°$ u vrcholu A. Jedním vrcholem tohoto rovnoběžníku vedeme dvě přímky, které rovnoběžník rozdělují na tři rovnoramenné trojúhelníky. Určete velikosti vnitřních úhlů těchto trojúhelníků.

ŘEŠENÍ. Pro vnitřní úhly daného rovnoběžníku $ABCD$ platí

$$|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle BCD| = 72° \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA| = 180° - 72° = 108°.$$

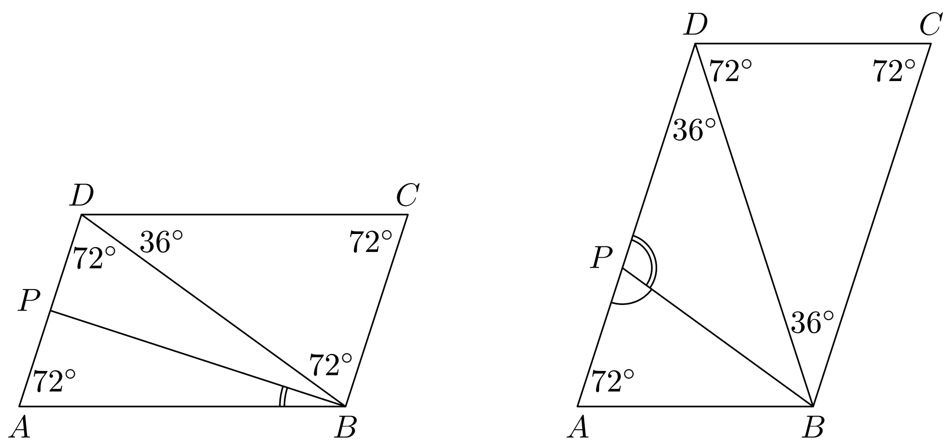
Protože $|AB| \neq |BC|$ a $|CD| \neq |DA|$, v obou trojúhelnících ABC a CDA svírají tupý úhel dvě strany různých délek, takže se nejedná o rovnoramenné trojúhelníky. Zmíněné dvě přímky proto procházejí buď vrcholem B, nebo vrcholem D a jedna z nich je přímka BD.

Můžeme předpokládat, že druhá přímka prochází vrcholem B a protíná stranu AD v bodě P (ve dvojicích B, D a A, C je totiž možné označení vrcholů prohodit). Rozlišíme, která ze stran AB, AP, BP je základnou rovnoramenného trojúhelníku ABP. V každém ze tří případů snadno určíme vnitřní úhly obou rovnoramenných trojúhelníků ABP, BPD a pak dopočteme úhly trojúhelníku BCD. Pouze v jediném případě vyjde rovnoramenný trojúhelník:



Vhodným rozdělením získáme rovnoramenné trojúhelníky s těmito vnitřními úhly: $72°$, $72°$, $36°$; $36°$, $36°$, $108°$; $72°$, $72°$, $36°$.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním postupu budeme již uvažovat jen tu situaci, kdy je rovnoběžník $ABCD$ rozdělen na rovnoramenné trojúhelníky ABP, BPD a BCD. Rozlišíme, která ze stran BC, CD je základnou třetího trojúhelníku (strana BD to být nemůže, neboť $|BC| \neq |CD|$):



Situaci na levém obrázku vyloučíme takto: v rovnoramenném trojúhelníku ABP má vnitřní úhel ABP jednu z velikostí 72°, 54°, 36°, takže $|\sphericalangle ABC| > 108°$, a to je spor. Na pravém obrázku určíme zbývající úhly následující úvahou: rovnoramenný trojúhelník ABP má u vrcholu P úhel 72°, 54° nebo 36°, zatímco rovnoramenný trojúhelník BDP má u vrcholu P úhel 108°, 72° nebo 36°. Součet těchto dvou úhlů se společným vrcholem P je úhel přímý, takže se jedná o úhly 72° a 108°.

[Zdůvodnění, proč přímky neprocházejí body A, C … 2 b., obrázek se správně doplněnými úhly … 3 b., vyloučení jiných možností … 1 b.]

Z7–II–2

Král Líného království vydal v neděli 1. dubna 2007 dekret, kterým vyřadil ze všech následujících týdnů pátky. Od té doby v jeho království následuje vždy po čtvrtku sobota a týden má jen šest dní. Který den v týdnu připadne v Líném království na 9. dubna 2008? (Nezapomeňte, že rok 2008 je přestupný!)

Řešení. Protože je rok 2008 přestupný, má období od pondělí 2. dubna 2007 (včetně) do 1. dubna 2008 (včetně) 366 dní. K tomuto počtu přičteme 8 dní (2. dubna 2008 až 9. dubna 2008). Takto dostaneme 374 dny, z nichž první je pondělí. V Líném království to jsou 62 týdny a 2 dny:

$$374 : 6 = 62 \text{ (zbytek 2)}.$$

„Zbytku dva“ tak odpovídá druhý den po neděli, což je v Líném království úterý. Datum 9. dubna 2008 tam tedy připadne na úterý.

[2 b. za určení počtu dnů, 1 b. za vydělení, 3 b. za správný závěr]

Z7–II–3

U Nováků napekli svatební koláče. Čtvrtinu zavezli příbuzným na Moravu, šestinu rozdali kolegům v práci a devítinu dali sousedům. Kdyby jim zůstalo o tři koláče více, byla by to polovina původního počtu. Kolik koláčů napekli?

Řešení. Novákovi rozdali čtvrtinu a šestinu a devítinu koláčů, o 3 víc než polovinu všech:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{19}{36}.$$

Polovina je $\frac{18}{36}$. Rozdali o $\frac{1}{36}$ více. $\frac{1}{36}$ tvoří 3 koláče, všech koláčů tedy bylo $36 \cdot 3 = 108$. Napekli 108 koláčů.

[Sečtení zlomků … 2 b., 1/36 jsou 3 koláče … 2 b., správná odpověď … 2 b.]