II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

Na zahradě pana Kozla kvetlo několik třešní. Na každé třešni seděli tři špačci a ještě jeden seděl na plotě. Pes pana Kozla je vyplašil a špačci uletěli. Za chvilku se všichni vrátili a usadili se na třešně. Třešeň, pod kterou spal pes, zůstala prázdná, na každé z ostatních se usadili čtyři špačci. Kolik třešní má pan Kozel a kolik bylo na zahradě špačků?

Řešení. Označíme x počet třešní v zahradě a y počet špačků. Jestliže víme, že všichni špačci si posedali na třešně po třech a jeden zůstal na plotě, můžeme sestavit následující rovnici:

$$y = 3x + 1.$$

Poté, co se znova špačci na třešně vrátili, obsadili po čtyřech všechny třešně kromě jedné, kde ležel pes. Opět můžeme sestavit rovnici:

$$y = 4(x - 1).$$

Protože je počet špačků stále stejný, musí být y u obou rovnic rovné stejnému číslu. Pak dostáváme:

$$3x + 1 = 4(x - 1),$$
$$5 = x.$$

Po dosazení do $y = 3x + 1$ vypočteme, že špačků bylo 16.

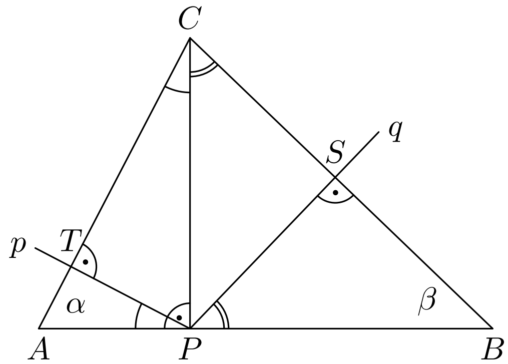
Pan Kozel má celkem 5 třešní a na zahradu přiletělo 16 špačků.

[Za sestavení každé rovnice 1 bod, za vyřešení rovnice 2 body, za správnou odpověď 2 body]

Z6–II–2

Je dán trojúhelník ABC takový, že pata P kolmice z bodu C na přímku AB leží uvnitř úsečky AB. Z bodu P jsou vedeny kolmice p, q na přímky AC a BC (v uvedeném pořadí). Označme S průsečík přímky BC a přímky q, T průsečík přímky AC a přímky p. Vypočítej velikost úhlu ACB, pokud víš, že $|\sphericalangle APT| + |\sphericalangle BPS| = 20°$.

Řešení. Z polohy paty P plyne, že vnitřní úhly $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ a $\beta = |\sphericalangle ABC|$ daného trojúhelníku jsou ostré:



Z pravoúhlých trojúhelníků APT, BPS plynou rovnosti

$$\alpha = 90^\circ - |\sphericalangle APT|, \quad \beta = 90^\circ - |\sphericalangle BPS|.$$

Jejich sečtením dostaneme

$$\alpha + \beta = 180^\circ - (|\sphericalangle APT| + |\sphericalangle BPS|) = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ.$$

Proto hledaný úhel $\gamma = |\sphericalangle ACB|$ daného trojúhelníku ABC má velikost

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ.$$

Úlohu lze řešit i jinými postupy. Například srovnáním pravoúhlých trojúhelníků APT a APC, resp. BPS a BPC dostáváme rovnosti

$$|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle APT| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle BPS|,$$

jejichž sečtením obdržíme

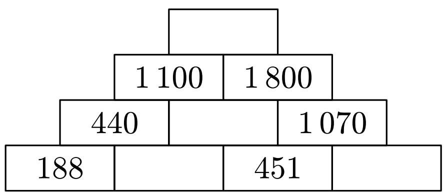
$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACP| + |\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle APT| + |\sphericalangle BPS| = 20^\circ.$$

(Další možnost nabízí čtyřúhelník $PSCT$, který má vnitřní úhly u vrcholů T, S pravé a u vrcholu P má úhel 160°.)

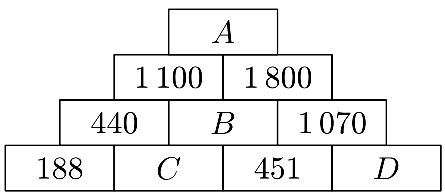
[Za úplné řešení udělte 6 bodů]

Z6–II–3

Na obrázku je zaokrouhlovací sčítací pyramida. Do každé cihly (kromě těch z nejspodnějšího řádku) patří součet čísel napsaných na dvou s ní sousedících cihlách z nižšího řádku, ovšem patřičně zaokrouhlený: součty ve druhém řádku odspodu zaokrouhlujeme na desítky, ve třetím na stovky a v nejvyšším čtvrtém na tisíce. Doplňte do prázdných cihel pyramidy největší možná celá čísla.



Řešení. Označme volná místa v pyramidě písmeny A, B, C, D:



Nejsnáze určíme nejvyšší možné hodnoty A a D.

Hodnota A:
$1\,100 + 1\,800 = 2\,900$, což po zaokrouhlení na tisíce dává $A = 3\,000$.

Hodnota D:
Z rovnice $D + 451 \doteq 1\,070$ (zaokrouhlení na desítky) dostáváme podmínku $614 \leqq D \leqq 623$, takže největší možná hodnota D je $D = 623$.

Hodnota B:
Musí být splněny dvě podmínky, které plynou z rovnic
$B + 440 \doteq 1\,100$ (zaokrouhlení na stovky), odkud $610 \leqq B \leqq 709$,
$B + 1\,070 \doteq 1\,800$ (zaokrouhlení na stovky), odkud $680 \leqq B \leqq 779$.

Číslo B musí být rovno celému počtu desítek, takže je dokonce $B \leqq 700$.

Hodnota C:
Musí být splněny dvě podmínky, které plynou z rovnic:
$C + 188 \doteq 440$ (zaokrouhlení na desítky), odkud $247 \leqq C \leqq 256$,
$C + 451 \doteq B$ (zaokrouhlení na desítky), odkud $B - 456 \leqq C \leqq B - 447$.

Jak už víme, platí $B \leqq 700$, takže $C \leqq B - 447 \leqq 253$. Při hodnotě $B = 700$ vyhovuje $C = 253$ oběma podmínkám, takže je největší možné, a zároveň máme potvrzeno, že největší možné B je $B = 700$.

3 000			
1 100	1 800		
440	700	1 070	
188	253	451	623

[1 bod za určení A, 2 body za určení B, 2 body za určení C, 1 bod za určení hodnoty D]