

## II. kolo kategorie Z5

## Z5–II–1

Polovina dětí 5.A chodí na taneční kroužek. Dívky chodí všechny a z 18 chlapců chodí jedna třetina.

- Kolik dětí chodí do 5.A?
- Kolik dívek chodí do 5.A?

ŘEŠENÍ. Do kroužku chodí všechny dívky a jedna třetina z 18 chlapců, tj. 6 chlapců, což je dohromady polovina žáků 5.A. Na taneční kroužek nechodí 12 chlapců, kteří tvoří druhou polovinu třídy.

- V třídě je tedy 24 dětí.
- $24 - 18 = 6$ . Dívek je 6.

[6 chlapců ... 1 bod, 12 chlapců je polovina ... 1 bod, 24 dětí ve třídě ... 2 body, 6 dívek ... 2 body]

## Z5–II–2

Marek sečetl čtyři po sobě jdoucí dvojmístná čísla a výsledek zaokrouhlil na desítky. Jirka vzal stejná čísla, nejdříve je zaokrouhlil na desítky a potom je sečetl. Jeho výsledek byl o deset větší než Markův. Která čísla chlapci sčítali, když jejich výsledky byly menší než 100? Najděte všechna možná řešení.

ŘEŠENÍ. Zkoušejme postupně všechny v úvahu přicházející čtveřice

Čísla	Markův výsledek	Jirkův výsledek
10, 11, 12, 13	50	40
11, 12, 13, 14	50	40
12, 13, 14, 15	50	50
13, 14, 15, 16	60	60
<b>14, 15, 16, 17</b>	60	70
<b>15, 16, 17, 18</b>	70	80
<b>16, 17, 18, 19</b>	70	80
<b>17, 18, 19, 20</b>	70	80
18, 19, 20, 21	80	80
19, 20, 21, 22	80	80
20, 21, 22, 23	90	80
...		
24, 25, 26, 27	100	110

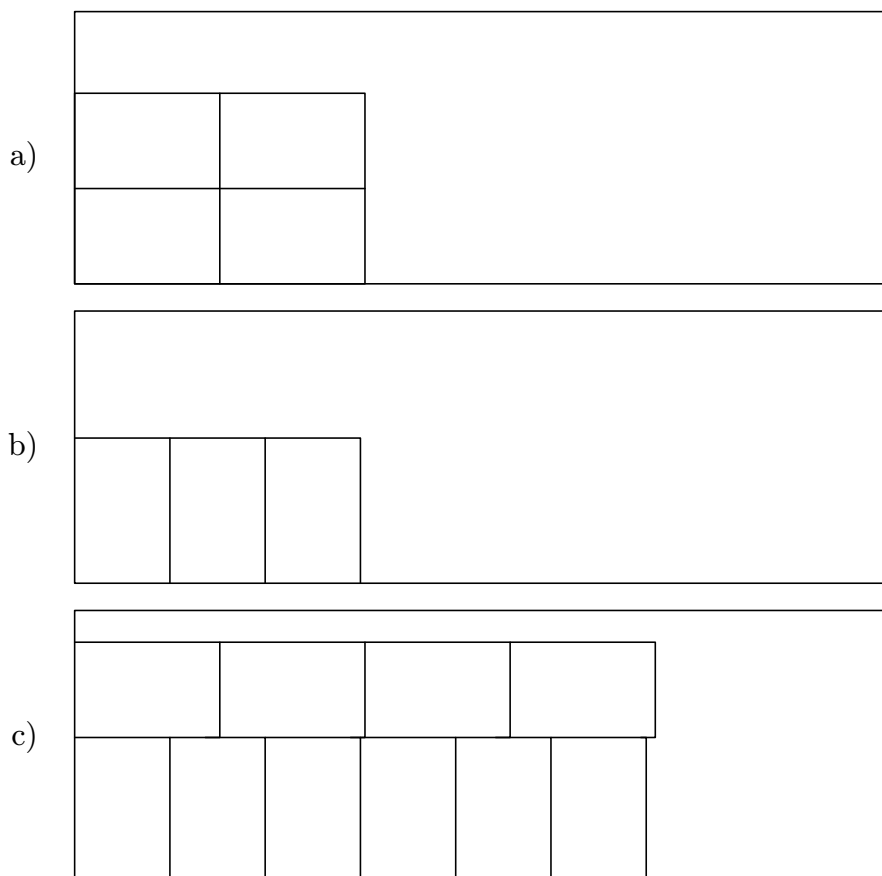
Čtyři možná řešení jsou v tabulce vyznačena polotučně. Pro větší čísla už bude výsledek matematických operací větší nebo roven 100.

[Za rozhodnutí řešit úlohu systematickým prohledáváním – 1 bod, za určení „krajních“ čtveřic s nejmenšími resp. největšími čísly – 1 bod, za každé řešení – 1 bod]

### Z5-II-3

Maminka šije utěrky z látky šíře 120 cm. Hotová utěrka má rozměry 60 cm × 38 cm. Při stříhání látky je potřeba počítat 2 cm na každém okraji na začištění. Kolik nejméně centimetrů látky musí maminka koupit, aby z ní mohla ušít 10 utěrek?

ŘEŠENÍ. Nejprve si musíme uvědomit, jaký kus látky potřebuje maminka vystříhnout na jednu utěrku. Bude to obdélník o rozměrech 42 cm a 64 cm. To znamená, že se nám na látku nevejdou ani tři utěrky „na šířku“, ani dvě utěrky „na výšku“. Naznačíme si jednotlivé umístění (ne úplně):



Při rozložení a) bude třeba  $5 \cdot 64 = 320$  cm látky.

Při rozložení b) bude zapotřebí  $10 \cdot 42 = 420$  cm látky.

Při rozložení c) musíme zjistit, která ze dvou délek je větší. Z náčrtku to přesně nevidíme, zda 4 utěrky v horní řadě nebo 6 utěrek ve spodní řadě:  $4 \cdot 64 = 256$  a  $6 \cdot 42 = 252$ .

Při rozložení c) bude třeba 256 cm látky.

Maminka musí koupit nejméně 256 cm látky.

[64 cm ... 1 bod, 42 cm ... 1 bod, způsob a) náčrt a výpočet ... 1 bod, způsob b) náčrt a výpočet ... 1 bod, způsob c) náčrt ... 1 bod, 256 cm ... 1 bod.]

Způsob b) nemusí být v řešení uveden, pokud je zřejmý postup a žák se dopracoval k správnému řešení, dejte plný počet bodů.]

## II. kolo kategorie Z9

## Z9–II–1

Bára si napsala dvě různá celá čísla. Potom je (ve stejném pořadí) sečetla, odečetla, vynásobila a vydělila. Dostala čtyři výsledky, jejichž součet byl  $-100$ . Když vynechala výsledek sčítání a sečetla zbývající tři výsledky, dostala také součet  $-100$ . Jaká čísla mohla Bára původně napsat?

ŘEŠENÍ. Označme hledaná celá čísla  $a, b$ . Podle zadání platí dvě rovnosti:

$$(a + b) + (a - b) + ab + (a : b) = -100,$$

$$(a - b) + ab + (a : b) = -100.$$

Pokud se po vynechání výsledku sčítání, celkový součet nezmění, je zřejmé, že  $a + b = 0$ , tedy  $a = -b$ . Po dosazení do druhé rovnice dostaneme:

$$-b - b - b^2 - 1 = -100, \quad \text{tj.} \quad -(b + 1)^2 = -100.$$

Odtud  $b + 1 = \pm 10$ , tedy buď  $b = 9$  (pak  $a = -9$ ), nebo  $b = -11$  (pak  $a = 11$ ). Barbora si tedy mohla napsat buď čísla  $-9$  a  $9$ , nebo čísla  $11$  a  $-11$ .

$[a = -b \dots 1 \text{ bod,}$

$-(b + 1)^2 = -100 \dots 1 \text{ bod}$

dopočítání a odpověď  $-9, 9 \dots 2 \text{ body,}$

dopočítání a odpověď  $11, -11 \dots 2 \text{ body}]$

## Z9–II–2

Z krychliček o hraně  $1 \text{ cm}$  jsme postavili kvádr. Kdybychom z kvádrů odebrali jeden sloupec, zbytek stavby by se skládal z  $602$  krychliček. Pokud bychom místo toho odebrali jeden řádek horní vrstvy, zůstala by nám stavba z  $605$  krychliček. Jaké má kvádr rozměry?

ŘEŠENÍ. Hrany podstavy kvádrů měří  $x \text{ cm}$  a  $y \text{ cm}$ , výška kvádrů je  $v \text{ cm}$ . Odebereme-li sloupec, tedy  $v$  krychliček, bude počet zbylých krychliček dělitelný číslem  $v$ . Pokud místo toho odebereme řádek, tedy  $x$  krychliček, bude počet zbylých krychliček dělitelný číslem  $x$ . Tedy číslo  $602$  je dělitelné  $v$ , číslo  $605$  je dělitelné  $x$ . Číslo  $602 = 2 \cdot 7 \cdot 43$  má tyto dělitele (jedním z nich je  $v$ ):

$$1, 2, 7, 14, 43, 86, 301, 602. \quad (1)$$

Číslo  $605 = 5 \cdot 11 \cdot 11$  má tyto dělitele (jedním z nich je  $x$ ):

$$1, 5, 11, 55, 121, 605. \quad (2)$$

V zadání čteme, že pokud odebereme  $v$  krychliček, zbude o tři krychličky méně, než kdybychom odebrali  $x$  krychliček. Tedy  $x + 3 = v$ . Ke každému číslu z řádku (2) přičtíme číslo tři a výsledné číslo se vždy pokusíme najít na řádku (1). To se podaří pouze v případě  $11 + 3 = 14$ . Tedy výška  $v = 14 \text{ cm}$ , hrana  $x = 11 \text{ cm}$ . Celkový počet krychliček je  $602 + 14 = 616$ . Hrana  $y = 616 : 14 : 11 = 4 \text{ cm}$ .

$[x + 3 = v \dots 1 \text{ bod,}$

$602$  je dělitelné  $v$ ,  $605$  je dělitelné  $x \dots 2 \text{ body,}$

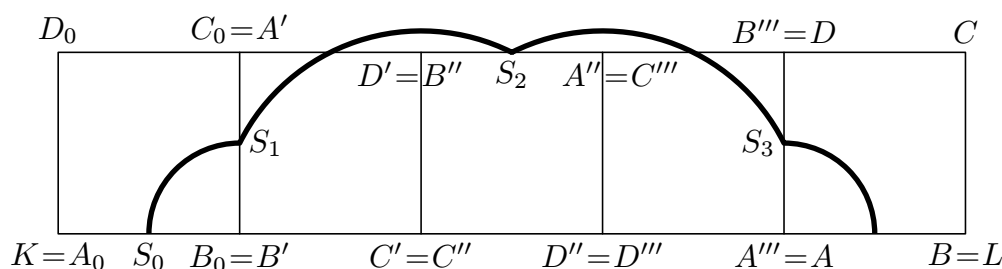
$14 \text{ cm, } 11 \text{ cm, } 4 \text{ cm s vysvětlením} \dots 3 \text{ body}]$

### Z9-II-3

Je dán čtverec  $ABCD$  o straně délky  $a$  a úsečka  $KL$  délky  $5a$  tak, že  $A \equiv K$  a strana  $AB$  leží na úsečce  $KL$ . Čtverec  $ABCD$  se „kutálením“ (otáčením kolem pravého dolního rohu čtverce o  $90^\circ$ ) pohybuje po úsečce  $KL$  tak dlouho, než strana  $AB$  opět splyne s částí úsečky  $KL$  ( $B \equiv L$ ).

- Narýsujte, jak se bude pohybovat bod  $S$ , který je středem strany  $AB$ .
- Určete délku křivky, kterou bod  $S$  při pohybu opsal.

ŘEŠENÍ. a) Na začátku pohybu jsme polohu čtverce označili  $A_0B_0C_0D_0$ . Potom jsme postupně označovali vrcholy čárkami, přičemž jeho poslední poloha je označena  $ABCD$ . Dráha bodu  $S$  je na obr. 1 vyznačena silně.



Obr. 1

b) Délka křivky: Pro délku křivky je nutné si uvědomit, že se skládá ze čtyř čtvrtkružnic. Jsou přitom jen dva různé poloměry čtvrtkružnic: poloměr  $B_0S_0 = \frac{1}{2}a$  a poloměr  $|S_1C'| = \frac{1}{2}\sqrt{5}a$ . Tedy délka křivky je

$$l = \frac{1}{4} 2\pi \frac{a}{2} + \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{5} \frac{a}{2} + \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{5} \frac{a}{2} + \frac{1}{4} 2\pi \frac{a}{2} = \frac{\pi a}{2} (1 + \sqrt{5}).$$

[Narýsovaná dráha ... 2 body  
poloměry ... 2 body  
 $\frac{1}{2}\pi a(1 + \sqrt{5})$  ... 2 body]

### Z9-II-4

Severských závodů psích spřežení se zúčastnilo dohromady celkem 315 dvojspřeží a trojspřeží. Do cíle dorazilo ve stanoveném limitu 60 % všech dvojspřeží a  $\frac{1}{3}$  všech trojspřeží, takže do cíle dorazila včas přesně polovina všech psů. Kolik dvojspřeží a kolik trojspřeží závodilo?

ŘEŠENÍ. Označme  $d$  počet dvojspřeží a  $t$  počet trojspřeží. Ze zadání sestavíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} d + t &= 315, \\ 0,6 \cdot d \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot t \cdot 3 &= \frac{1}{2}(2d + 3t). \end{aligned}$$

Její řešení dostaneme  $t = 90$ ,  $d = 225$ .

Na startu bylo 225 dvojspřeží a 90 trojspřeží.

[Sestavení rovnic ... 3 body  
řešení soustavy ... 2 body  
odpověď ... 1 bod]