II. kolo kategorie Z5

Z5–II–1

Karel měl sčítat všechna dvojmístná čísla, která po dělení deseti dávají zbytek, který se dá beze zbytku dělit pěti. Jedno z čísel však omylem započítal třikrát, takže mu vyšel součet 1 035. Které číslo započetl třikrát? (*S. Bednářová*)

Řešení. Karel měl sčítat čísla

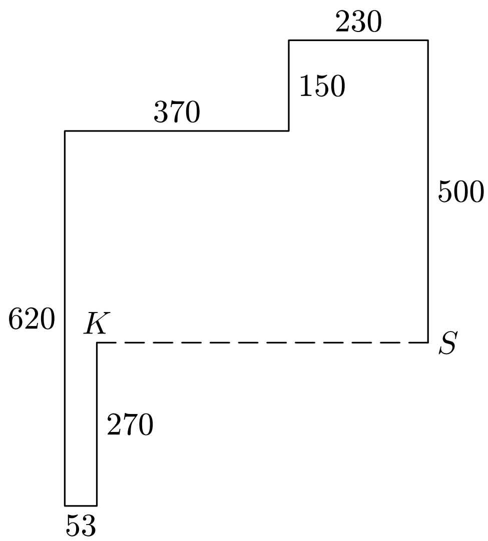
$$10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95.$$

Jejich součet je 945. Karel však napočítal 1 035, což je o 90 víc. Karel započítal třikrát číslo 45.

Z5–II–2

Krteček si začal razit nový tunel. Nejdříve tunel vedl 5 metrů na sever, potom 23 dm na západ, 150 cm na jih, 37 dm na západ, 620 cm na jih, 53 cm na východ a 27 dm na sever. Kolik centimetrů mu ještě zbývá vykopat, aby se dostal na začátek tunelu? (*M. Dillingerová*)

Řešení. Po převedení všech údajů na centimetry si můžeme krtečkův tunel nakreslit. Krteček začal razit tunel v bodě S a skončil v bodě K (používáme obvyklou orientaci světových stran).



Úkolem je určit délku přerušované čáry. Ve směru „západ-východ“ se krteček z bodu S posunul o $230 + 370 - 53 = 547$ cm na západ. Ve směru „sever-jih“ se krteček z bodu S posunul o $500 - 150 - 620 + 270 = 0$ cm na sever.

Krteček se nachází 547 cm od výchozího bodu.

Z5–II–3

Z čísla 9 876 543 210 vyškrtni co nejmenší počet číslic tak, aby na místě desítek byla číslice třikrát menší než na místě tisíců a na místě jednotek byla číslice o tři menší než na místě stovek. Najdi všechna řešení. (*S. Bodláková*)

Řešení. První možnost je, že na místě tisíců bude 3 a na místě desítek 1, pak ale nesplníme druhou podmínku.

Tedy na místě tisíců musí být 6 a na místě desítek 2. To je možné při splnění druhé podmínky dvěma způsoby. Výsledkem budou čísla 9 876 320 a 9 876 421.

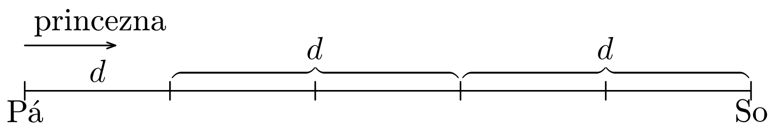
54. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Princ Zrychlený pozval princeznu Zpomalenou na svůj hrad. Když dlouho nešla, vydal se jí naproti. Po dvou dnech putování ji potkal v jedné pětině její cesty. Spolu už pokračovali v cestě dvakrát rychleji, než když cestovala princezna sama. Na princův hrad dorazili druhou sobotu od vzájemného setkání. Který den se potkali, jestliže princezna vyrazila ze svého hradu v pátek? (*M. Dillingerová*)

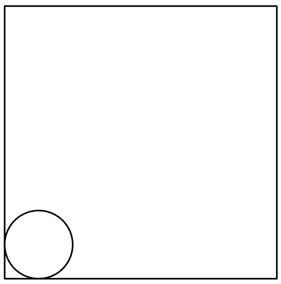
Řešení. Načrtněme si vzdálenost hradů princezny Zpomalené a prince Zrychleného. Pokud



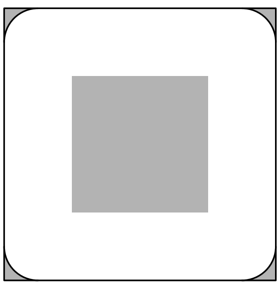
první pětinu cesty ušla za d dní, pak zbytek cesty musela ujít za $\frac{1}{2}4d = 2d$ dní. Víme, že $7 < 2d < 15$. Zkoušíme různé celočíselné hodnoty d. Jediná, pro kterou správně vyjde, že princezna vyrazila v pátek, je $d = 5$. Princ s princeznou se potkali ve středu.

Z9–II–2

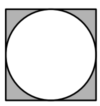
Uvnitř čtverce o straně 4 cm se pohybuje kruh s průměrem 1 cm tak, že se stále dotýká obvodu trojúhelníku. Vypočítejte obsah té části čtverce, která nemůže být nikdy překryta pohybujícím se kruhem. (*M. Dillingerová*)



Řešení. Vyjdeme z následujících obrázků.



Obr. 1



Obr. 2

a) Nepokrytá část čtverce je na obr. 1 vyznačena šedě. Skládá se ze čtyř „rohů“ a vnitřního čtverce. Dáme-li rohy k sobě, dostaneme obr. 2. Obsah této nepokryté plochy bude $1 - \pi \cdot 0{,}5^2\,\mathrm{cm}^2$.

b) Uprostřed zůstane nepokrytý čtverec o straně $4 - 1 - 1 = 2\,\mathrm{cm}$. Jeho plocha je $2 \cdot 2 = 4\,\mathrm{cm}^2$.

Celkem nebude pokryto $1 - \pi \cdot 0{,}5^2 + 4 = \left(5 - \frac{1}{4}\pi\right)\mathrm{cm}^2$.

Z9–II–3

Do okresního kola postoupili Petr, Mojmír, Karel a Eva. Ve škole pak sdělili:

Eva: „Z naší čtveřice jsem nebyla ani první, ani poslední.“

Mojmír: „Nebyl jsem z naší čtveřice poslední.“

Karel: „Byl jsem z nás první.“

Petr: „Já jsem byl z naší čtveřice poslední.“

Tři mluvili pravdu, jeden lhal. Kdo z nich byl v okresním kole nejlepší? (*M. Volfová*)

Řešení. Kdyby lhali:

- ▷ Eva: Tedy ve skutečnosti by byla první nebo poslední. To však odporuje tvrzení Karla a Petra.
- ▷ Mojmír: Byl by poslední, ale to by lhal i Petr.
- ▷ Petr: Ve skutečnosti by tedy nebyl poslední, ale to by nebyla ani Eva, ani Mojmír, ani Karel, takže poslední by nemohl být nikdo.

Nemohla tedy lhát ani Eva, ani Mojmír, ani Petr. Lhal Karel, ostatní mluvili pravdu. První byl Mojmír.

Z9–II–4

Uklízečka stírala schodiště v mrakodrapu. Aby jí práce lépe ubíhala, počítala umyté schody. V době, kdy měla umytu přesně polovinu schodů, si udělala přestávku. Za chvíli se dala znovu do práce a chtěla také pokračovat v počítání schodů. Když ale vzpomínala na počet již umytých schodů, dopustila se omylu. Správné trojciferné číslo „přečetla“ odzadu, čímž vzniklo číslo nižší, a počítala od tohoto čísla. Po setření všech schodů došla k číslu 746. Kolik schodů mohla umýt ve skutečnosti? (*L. Šimůnek*)

Řešení. Označme $100a + 10b + c$ počet schodů, které uklízečka umyla před přestávkou. Ze zadání vyplývá, že

$$100a + 10b + c + 100c + 10b + a = 746,$$

tj.

$$101(a + c) + 20b = 746.$$

Součet $a + c$ je tedy sudý, a proto $a + c = 6$. Odtud vyplývá, že $b = 7$. Protože $a > c$, může být polovina schodů v mrakodrapu buď 571, nebo 472. Proto uklízečka mohla umýt buď 1 142, nebo 944 schody.