68. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Majka, Vašek a Zuzka počítali o víkendu úlohy. Majka a Vašek vypočítali celkem 25 úloh. Zuzka a Vašek vypočítali celkem 32 úloh. Přitom Zuzka vypočítala dvakrát víc úloh než Majka.

Kolik úloh vypočítal Vašek? (*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Zuzka vypočítala dvakrát víc úloh než Majka. Tedy počet úloh, které celkem vypočítali Zuzka a Vašek, je stejný jako počet úloh, které celkem vypočítali Majka a Vašek, zvětšený o počet úloh, které vypočítala Majka.

Zuzka a Vašek vypočítali celkem 32 úloh, Majka a Vašek vypočítali celkem 25 úloh, tedy Majka vypočítala 7 úloh ($32 - 25 = 7$). Odtud dostáváme, že Vašek vypočítal 18 úloh ($25 - 7 = 18$).

Hodnocení. 3 body za úvodní rozvahu; 3 body za dopočítání a závěr.

Poznámka. Pokud m, v, resp. z značí počty úloh, které vypočítali Majka, Vašek, resp. Zuzka, potom ze zadání máme $m + v = 25$, $z + v = 32$ a $z = 2m$. Předchozí myšlenky tak lze stručně zapsat následovně:

$$32 = 2m + v = m + m + v = m + 25,$$

tedy $m = 7$ a $v = 18$.

Z7–II–2

Mezi číslice čísla 2019 vložte dvě číslice tak, aby vzniklé šestimístné číslo

- začínalo 2 a končilo 9,
- bylo složeno z šesti různých číslic,
- bylo dělitelné třemi,
- jeho první trojčíslí bylo dělitelné třemi,
- jeho první čtyřčíslí bylo dělitelné čtyřmi,
- součet vložených číslic byl lichý.

Určete rozdíl největšího a nejmenšího šestimístného čísla s uvedenými vlastnostmi. (*L. Růžičková*)

Možné řešení. Aby nové číslo sestávalo ze šesti různých číslic, můžeme vkládat dvě různé číslice z číslic

$$3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

Součet číslic čísla 2019 je 12, tedy číslo dělitelné třemi. Aby bylo i nově vzniklé číslo dělitelné třemi, můžeme vkládat jenom takové číslice, jejichž součet je dělitelný třemi. Poslední podmínka ze zadání navíc vyžaduje, aby tento součet byl lichý. Ze všech možných dvojic čísel tak můžeme použít jenom následující (v libovolném pořadí):

$$3, 6, \quad 4, 5, \quad 7, 8.$$

Aby nové číslo začínalo 2 a končilo 9, můžeme číslice vkládat jenom do míst vyznačených hvězdičkou:

$$2{*}{*}019,\quad 2{*}0{*}19,\quad 2{*}01{*}9,\quad 20{*}{*}19,\quad 20{*}1{*}9,\quad 201{*}{*}9.$$

Aby první trojčíslí bylo dělitelné třemi, nemůžeme v prvním případě doplnit žádnou z uvedených dvojic, ve druhém až pátém případě můžeme doplnit dvojici 4, 5 nebo 7, 8 (v tomto pořadí) a v posledním případě můžeme doplnit kteroukoli z uvedených dvojic (v libovolném pořadí):

$$2\underline{4}0\underline{5}19,\quad 2\underline{7}0\underline{8}19,\quad 2\underline{4}01\underline{5}9,\quad 2\underline{7}01\underline{8}9,\quad 20\underline{4}1\underline{5}9,\quad 20\underline{7}1\underline{8}9,$$

$$201\underline{36}9,\quad 201\underline{63}9,\quad 201\underline{45}9,\quad 201\underline{54}9,\quad 201\underline{78}9,\quad 201\underline{87}9.$$

Aby první čtyřčíslí bylo dělitelné čtyřmi, musí být druhé dvojčíslí dělitelné čtyřmi. Z uvedených možností tak nakonec zbývají pouze dvě

$$2\underline{7}0\underline{8}19,\quad 201\underline{63}9.$$

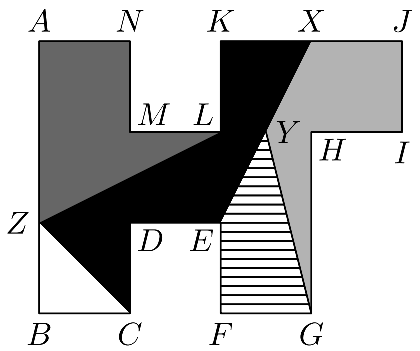
Využili jsme všechny požadavky ze zadání; poptávaný rozdíl je roven 69180.

Hodnocení. 3 body za vyhovující možnosti a konečný rozdíl; 3 body za kvalitu, resp. úplnost komentáře.

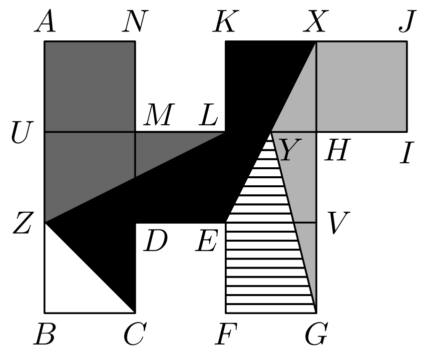
Z7–II–3

Útvar na obrázku je složen z osmi shodných čtverců a je rozdělen úsečkami na pět barevně odlišených částí. Přitom bod X je středem úsečky KJ, bod Y je středem úsečky EX a úsečka BZ je shodná s BC. Obsah černé části útvaru je 7,5 cm^2.

Určete obsahy zbylých čtyř částí. (*E. Semerádová a M. Dillingerová*)



Možné řešení. V obrázku zvýrazníme osm shodných čtverců a pomocí nich vyjádříme obsahy jednotlivých částí:



Bílá část tvoří polovinu čtverce.

Tmavě šedou část můžeme rozdělit na čtverec a pravoúhlý trojúhelník ZUL, jehož odvěsny jsou rovny jedné a dvěma stranám čtverce. Tento trojúhelník má stejný obsah jako čtverec ($\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$), tedy obsah tmavě šedé části je stejný jako obsah 2 čtverců.

Černou část můžeme rozdělit na tři pravoúhlé trojúhelníky: trojúhelníky ZEL a EKX jsou shodné s výše zmiňovaným trojúhelníkem ZUL, trojúhelník ZDC tvoří polovinu čtverce. Obsah černé části je tedy stejný jako obsah $\frac{5}{2}$ čtverce ($1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$).

Světle šedou část můžeme rozdělit na čtverec a trojúhelník GXY. Body X a E jsou vrcholy čtverců a bod Y je středem úsečky EX, kterou interpretujeme jako úhlopříčku obdélníku $KEVX$. Úsečka HY je proto shodná s polovinou strany čtverce. Tato úsečka je výškou trojúhelníku GXY na stranu GX, a ta je rovna třem stranám čtverce. Trojúhelník GXY má stejný obsah jako $\frac{3}{4}$ čtverce ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{4}$), tedy obsah světle šedé části je stejný jako obsah $\frac{7}{4}$ čtverce ($\frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$).

Zbylou část můžeme vyjádřit jako rozdíl výše uvedených částí,

$$8 - 2 - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} - \frac{7}{4} = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4},$$

tedy obsah šrafované části je stejný jako obsah $\frac{5}{4}$ čtverce.

Nyní využijeme poznatek, že obsah černé části je 7,5 cm^2. To podle předchozího odpovídá $\frac{5}{2}$ čtverce, tedy obsah jednoho čtverce je 3 cm^2 ($\frac{5}{2} \cdot 3 = 7{,}5$). Odtud uzavíráme, že obsah bílé části je 1,5 cm^2 ($\frac{1}{2} \cdot 3 = 1{,}5$), obsah tmavě šedé části je 6 cm^2 ($2 \cdot 3 = 6$), obsah světle šedé části je 5,25 cm^2 ($\frac{7}{4} \cdot 3 = 5{,}25$), a obsah šrafované části je 3,75 cm^2 ($\frac{5}{4} \cdot 3 = 3{,}75$).

Hodnocení. 4 body za vyjádření obsahů všech částí pomocí čtverců; 2 body za dopočítání obsahů v cm^2.