68. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

Jan, Dan, Anna a Hana mají každý své oblíbené číslo. Víme, že

- sečteme-li Danovo číslo a trojnásobek Janova čísla, vyjde liché číslo,
- odečteme-li od sebe Annino a Hanino číslo a tento výsledek vynásobíme pěti, vyjde liché číslo,
- vynásobíme-li Danovo číslo Haniným číslem a k výsledku přičteme 17, vyjde sudé číslo.

Určete, čí oblíbená čísla jsou lichá a čí sudá. (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Při řešení budeme opakovaně odkazovat na vlastnosti součtů a součinů celých čísel vzhledem k jejich paritě, které shrnujeme v následujícím schématu:

$$\begin{array}{lll} \text{sudé} + \text{sudé} = \text{sudé}, & \text{sudé} + \text{liché} = \text{liché}, & \text{liché} + \text{liché} = \text{sudé}, \\ \text{sudé} \times \text{sudé} = \text{sudé}, & \text{sudé} \times \text{liché} = \text{sudé}, & \text{liché} \times \text{liché} = \text{liché}. \end{array}$$

Odtud a ze třetí podmínky ze zadání se dozvídáme, že součin Danova a Hanina čísla je lichý, a tedy obě tato čísla jsou lichá.

Ze druhé podmínky plyne, že rozdíl Annina a Hanina čísla je lichý. Protože Hanino číslo je liché, musí být Annino číslo sudé.

Protože Danovo číslo je liché, plyne z první podmínky, že trojnásobek Janova čísla je sudý, a tedy Janovo číslo je také sudé.

Danovo a Hanino oblíbené číslo je liché, Annino a Janovo číslo je sudé.

Hodnocení. Po 1 bodu za určení parity každého čísla; 2 body za kvalitu komentáře.

Z6–II–2

Anička má v kasičce naspořeno 290 mincí, a to koruny a dvoukoruny. Když použije čtvrtinu všech dvoukorun, složí stejnou částku, jako když použije třetinu všech korun.

Jakou celkovou částku má Anička naspořenu? (*L. Růžičková*)

Možné řešení. Vyjdeme z požadavku, že čtvrtina dvoukorunových mincí dává stejnou částku jako třetina korunových mincí. Odtud jednak vyplývá, že počet dvoukorunových mincí je násobkem čtyř a počet korunových mincí je násobkem tří, a jednak, že tyto počty jsou v poměru $4 : 6$. Tedy počet dvoukorun je roven $4k$ a počet korun $6k$, kde k je nějaké kladné celé číslo ($2 \cdot \frac{4k}{4} = \frac{6k}{3}$).

Při tomto značení je celkový počet mincí roven $10k = 290$. Odtud vyplývá, že $k = 29$, tedy že Anička má $4 \cdot 29 = 116$ dvoukorunových mincí a $6 \cdot 29 = 174$ korunových mincí. Celková hodnota jejích úspor tedy je

$$2 \cdot 116 + 174 = 406 \text{ korun.}$$

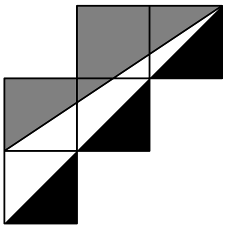
Hodnocení. 4 body za určení vztahů mezi počty korunových a dvoukorunových mincí (zde pomocí neznámé k); 2 body za určení k a výsledek.

Poznámka. Pomocí neznámé k je celková hodnota Aniččiných úspor vyjádřena jako $(2 \cdot 4 + 6) \cdot k = 14 \cdot k$.

Z6–II–3

Útvar na obrázku je složen z pěti shodných čtverců a je rozdělen úsečkami na tři barevně odlišené části. Obsah šedé části je o 0,6 cm^2 větší než obsah bílé části.

Určete obsah celého útvaru. (*E. Semerádová*)



Možné řešení. Šedou část si můžeme představit jako pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami rovnými dvěma a třem stranám čtverce, z něhož je odebrán jeden čtverec. Obsah této části je tedy stejný jako obsah 2 čtverců ($\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 - 1 = 2$).

Bílá část tvoří trojúhelník, jehož jedna strana je rovna straně čtverce a výška na tuto stranu je rovna třem stranám čtverce. Obsah této části je tedy stejný jako obsah $\frac{3}{2}$ čtverce ($\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2}$).

Rozdíl obsahů šedé a bílé části odpovídá polovině čtverce, což je podle zadání 0,6 cm^2. Tedy jeden čtverec má obsah 1,2 cm^2 a obsah celého útvaru je 6 cm^2 ($5 \cdot 1{,}2 = 6$).

Hodnocení. Po 2 bodech za vyjádření obsahů šedé a bílé části; 2 body za dopočítání obsahu v cm^2.