67. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Ve finále soutěže společenských tanců měl každý z dvaceti pěti porotců ohodnotit pět tanečních párů známkami 1 až 5 jako ve škole, přičemž každou známku musel použít právě jednou. Po soutěži byla zveřejněna tabulka s průměry známek pro každý pár:

pár A	pár B	pár C	pár D	pár E
4,68	3,86	3,36	1,44	1,60

Záhy se zjistilo, že právě jeden z průměrů je v tabulce uveden špatně. Zjistěte, který průměr je chybný, a opravte jej.

Jedním z porotců byl strýc tanečníka páru E. Páry však hodnotil čestně a bez zaujetí následujícím způsobem: 1 pro D, 2 pro E, 3 pro B, 4 pro C a 5 pro A. Přesto mu po vyhlášení opravených výsledků vrtalo hlavou, zda by býval mohl nepoctivým oznámkováním posunout pár E na první místo. Zjistěte, zda to mohl dokázat. (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Průměr známek každého páru je roven součtu všech jemu přidělených známek vydělenému číslem 25. Součty známek jednotlivých párů by tak měly být:

$$4{,}68 \cdot 25 = 117, \quad 3{,}86 \cdot 25 = 96{,}5, \quad 3{,}36 \cdot 25 = 84, \quad 1{,}44 \cdot 25 = 36, \quad 1{,}60 \cdot 25 = 40.$$

Vidíme, že součet známek u páru B není přirozené číslo, výsledek tohoto páru byl tedy chybný. Nyní jej opravíme. Součet všech známek udělených v soutěži byl

$$25 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 25 \cdot 15 = 375.$$

Odečteme součty známek udělených párům A, C, D, E a získáme součet známek udělených páru B:

$$375 - 117 - 84 - 36 - 40 = 375 - 277 = 98.$$

Správný průměr známek udělených páru B byl tedy

$$98 : 25 = 3{,}92.$$

Pokud by chtěl zmíněný porotce co nejvíce prospět páru E, mohl místo známky 2 udělit 1. Tím by se součet známek páru E zmenšil z 40 na 39. Aby páru D co nejvíce uškodil, mohl místo známky 1 udělit 5 a součet jeho známek tak zvětšit z 36 na 40. V takovém případě by výsledek páru D byl horší než výsledek páru E. Zmíněný porotce tedy mohl nepoctivým oznámkováním posunout pár E na první místo.

Hodnocení. 2 body za určení chybného průměru; 2 body za jeho opravu; 2 body za řešení zbylé části úlohy.

Poznámka. Násobení 25 je totéž jako násobení 100 následované dělením 4. Chybný průměr lze tedy odhalit kontrolou, zda dvojčíslí za desetinou čárkou je dělitelné čtyřmi. Správný průměr páru B lze (bez roznásobování 25 a následným dělením týmž číslem) určit takto:

$$15 - 4{,}68 - 3{,}36 - 1{,}44 - 1{,}60 = 3{,}92.$$

Z9–III–2

Každé z čísel a a b lze vyjádřit jako součin tří prvočísel menších než 10. Každé prvočíslo menší než 10 je přítomno v rozkladu alespoň jednoho z čísel a a b. Největší společný dělitel čísel a a b je roven největšímu společnému děliteli čísel $\frac{a}{15}$ a b a současně dvojnásobku největšího společného dělitele čísel a a $\frac{b}{4}$.

Určete čísla a a b. (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Prvočísla menší než 10 jsou 2, 3, 5 a 7. Ze zadání plyne, že číslo a je dělitelné 15 a číslo b je dělitelné 4. Prvočíselné rozklady těchto čísel jsou proto tvaru

$$a = 3 \cdot 5 \cdot p, \qquad b = 2 \cdot 2 \cdot q,$$

kde p a q jsou prvočísla z výše uvedeného seznamu.

Protože největší společný dělitel čísel a a b je roven dvojnásobku největšího společného dělitele čísel a a $\frac{b}{4}$, musí být $p = 2$ a $q \neq 2$. Tedy

$$a = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30.$$

Protože největší společný dělitel čísel a a b je roven největšímu společnému děliteli čísel $\frac{a}{15}$ a b, nemůže být q ani 3, ani 5. Z předchozího víme, že q nemůže být ani 2. Tedy $q = 7$ a

$$b = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 28.$$

Každé z uvedených prvočísel je přítomno v rozkladu alespoň jednoho z čísel a a b. Neznámá čísla jsou $a = 30$ a $b = 28$.

Hodnocení. 1 bod za dělitelnost čísla a patnácti; 1 bod za dělitelnost čísla b čtyřmi; 3 body za diskusi možností pro p a q; 1 bod za určení vyhovující možnosti a vyjádření a a b.

Z9–III–3

Na tajemném ostrově žijí dva druhy domorodců: jedni mluví výhradně pravdu (poctivci), druzí stále lžou (lháři). Výzkumníci tam potkali několik skupin domorodců a vždy se každého ze skupiny zeptali, kolik je v jejich skupině poctivců.

- Jako odpovědi od jedné čtyřčlenné skupiny dostali všechna čísla stejná.
- Jako odpovědi od druhé skupiny dostali čísla 0, 1, 3, 3, 3, 4.

Kolik poctivců mohlo být v jedné a kolik ve druhé skupině? Určete všechny možnosti. (*M. Volfová*)

Možné řešení. Kdyby v první skupině byli samí poctivci, dostali by výzkumníci jako odpověď čísla 4, 4, 4, 4. Kdyby ve skupině byli tři, dva, resp. jeden poctivec, nemohli by výzkumníci dostat jako odpověď čtyři stejná čísla. Kdyby ve skupině byli jenom lháři, mohli by výzkumníci jako odpověď dostat jakoukoli čtveřici čísel neobsahující 0. V první skupině proto mohly být buď čtyři poctivci, nebo žádný.

Protože všichni poctivci ve skupině musí (na rozdíl od lhářů) odpovídat stejně, číslo k může představovat odpověď poctivce, pouze když se opakuje k-krát. Proto počet poctivců ve druhé skupině mohl být buď jeden, nebo tři. (Kdyby ve skupině byli samí lháři, potom by odpověď 0 byla pravdivá, což u lhářů není možné.)

Hodnocení. Po 2 bodech za určení možností u každé skupiny; 2 body za úplnost a kvalitu komentáře.

Z9–III–4

V kosočtverci $ABCD$ se stranou délky 4 cm a úhlopříčkou AC délky 4 cm je bod K středem strany BC. Dále jsou sestrojeny body L a M, které tvoří spolu s body D a K čtverec $KLMD$.

Vypočtěte obsah čtverce $KLMD$. (*L. Růžičková*)

Možné řešení. Podle zadání je kosočtverec $ABCD$ tvořen dvěma shodnými rovnostrannými trojúhelníky ACD a ABC. Bod K je středem strany BC, úsečka AK je výškou v trojúhelníku ABC a osou úhlu CAB. Vnitřní úhly v rovnostranných trojúhelnících mají velikost $60°$, proto je velikost úhlu CAK rovna $30°$ a velikost úhlu DAK je $60° + 30° = 90°$. Trojúhelník DAK je tedy pravoúhlý, přičemž jeho přepona je stranou hledaného čtverce.

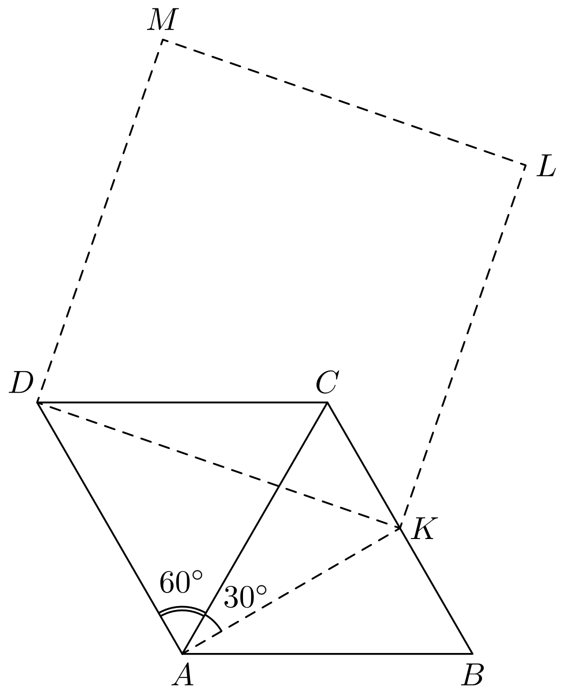
Strana DA má velikost 4 cm. Strana AK je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku AKC, jehož zbylé strany měří 4 cm a 2 cm. Podle Pythagorovy věty platí

$$|AK|^2 = |AC|^2 - |CK|^2 = 4^2 - 2^2 = 12\,(\mathrm{cm}^2).$$

Nyní podle Pythagorovy věty v trojúhelníku DAK dostáváme

$$|DK|^2 = |DA|^2 + |AK|^2 = 4^2 + 12 = 28\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsah čtverce $KLMD$ je $28\,\mathrm{cm}^2$.



Hodnocení. 2 body za určení pravého úhlu DAK; 2 body za určení $|AK|^2$; 2 body za určení $|DK|^2$.