67. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Florián přemýšlel, jakou kytici nechá mamince uvázat ke Dni matek. V květinářství podle ceníku spočítal, že ať koupí 5 klasických gerber nebo 7 minigerber, kytice bude stát po doplnění ozdobné stuhy stejně, a to 295 korun. Pokud by však koupil jen 2 minigerbery a 1 klasickou gerberu bez dalších doplňků, zaplatí 102 korun.

Kolik stojí jedna stuha? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Ze zadání plyne, že 5 klasických gerber stojí stejně jako 7 minigerber, tedy že cena klasické gerbery a cena minigerbery jsou v poměru 7 : 5. Pokud cenu klasické gerbery znázorníme 7 stejnými díly, cena minigerbery bude odpovídat 5 takovým dílům.

Cena nákupu 2 minigerber a 1 klasické gerbery představuje $2 \cdot 5 + 7 = 17$ těchto dílů, 1 díl proto odpovídá částce $102 : 17 = 6$ korun. Pět klasických gerber, resp. sedm minigerber stojí $5 \cdot 7 \cdot 6 = 210$ korun. Cena stuhy je $295 - 210 = 85$ korun.

Hodnocení. 2 body za zjištění, že ceny klasické gerbery a minigerbery jsou v poměru 7 : 5; 2 body za zjištění odpovídající rovnici $17d = 102$; 2 body za odvození ceny stuhy ($d = 6$, $295 - 5 \cdot 7 \cdot d = 85$).

Z7–II–2

Na stole leželo šest kartiček s číslicemi 1, 2, 3, 4, 5 a 6. Kamila ze tří kartiček složila trojmístné číslo, které bylo větší než 500 a bylo dělitelné čtyřmi. Filip ze zbylých tří kartiček složil trojmístné číslo dělitelné třemi i pěti. Kamila pak obě trojmístná čísla sečetla a Filip si všiml, že tento součet je trojmístné číslo, které se čte stejně zleva jako zprava.

Která čísla mohli Kamila s Filipem složit? Určete všechny možnosti. (*L. Růžičková*)

Možné řešení. Filipovo číslo má být dělitelné pěti, proto z nabízených číslic musí na místo jednotek použít 5. V Kamilině čísle se tedy 5 vyskytovat nemůže. Zároveň má její číslo být větší než 500, musí tedy mít na místě stovek číslici 6.

Filipovo číslo má být dělitelné třemi, tzn. jeho ciferný součet má být dělitelný třemi, tedy součet prvních dvou číslic má po dělení třemi dávat zbytek 1. Z nabízených číslic tak Filip mohl složit čísla

$$135, \quad 315, \quad 345, \quad 435.$$

Kamilino číslo má být dělitelné čtyřmi, tzn. jeho poslední dvojčíslí má být dělitelné čtyřmi. Z nabízených číslic tak Kamila mohla složit čísla

$$612, \quad 624, \quad 632.$$

Zároveň má platit, že čísla použitá ve Filipově čísle nemohou být v Kamilině čísle, a naopak. Filip a Kamila tedy mohli složit následující dvojice čísel:

Filip	135	315	345	435
Kamila	624	624	612	612
Součet	759	939	957	1 047

Jediný součet, který se čte zleva stejně jako zprava, je 939. Filip složil číslo 315, Kamila složila číslo 624.

Hodnocení. Celkem 1 bod za zjištění, že Filipovo číslo končí číslicí 5 a Kamilino číslo začíná číslicí 6; po 2 bodech za určení možných Filipových, resp. Kamiliných čísel vyhovujících podmínkám dělitelnosti; 1 bod za výběr možných dvojic, určení jejich součtů a dořešení.

Pokud řešitel přehlédne některou z podmínek a kromě jediného možného řešení uvede další (např. $632 + 145 = 777$), udělte nejvýše 4 body. Za správné řešení bez zdůvodnění udělte nejvýše 2 body.

Poznámka. Součet všech šesti daných číslic je dělitelný třemi a ciferný součet Filipova čísla má být dělitelný třemi, proto i ciferný součet Kamilina čísla musí být dělitelný třemi. Tento poznatek ve výše uvedeném řešení vylučuje možnost 632 mezi Kamilinými čísly.

Z7–II–3

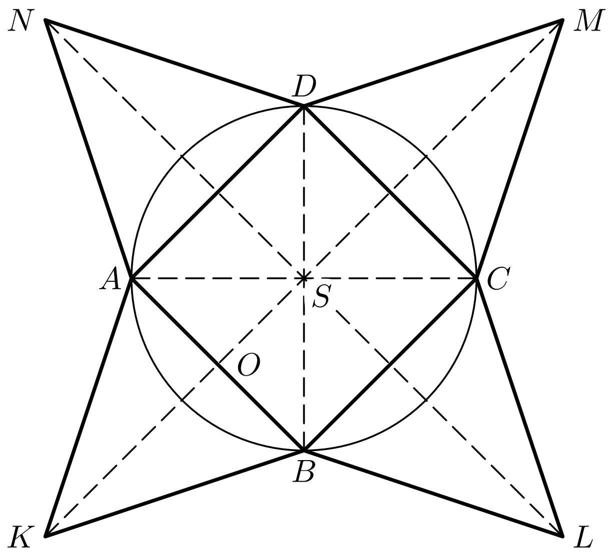
Sestrojte kružnici se středem S a poloměrem 3 cm. Sestrojte dva navzájem kolmé průměry AC a BD této kružnice. Sestrojte rovnoramenné trojúhelníky ABK, BCL, CDM, DAN tak, aby:

- základnou každého trojúhelníku byla strana čtyřúhelníku $ABCD$,
- základna každého trojúhelníku byla shodná s výškou na tuto stranu,
- žádný trojúhelník nepřekrýval čtyřúhelník $ABCD$.

Ze zadaných údajů vypočtěte obsah mnohoúhelníku $AKBLCMDN$. (*M. Krejčová*)

Možné řešení. Rozbor:

Úsečky AC a BD jsou shodné, navzájem kolmé a střed každé z nich splývá s jejich průsečíkem. Proto body A, B, C, D tvoří vrcholy čtverce. Trojúhelník ABK je rovnoramenný se základnou AB, proto jeho vrchol K leží na ose úsečky AB. Osa úsečky AB splývá s osou úsečky CD a na této přímce leží také střed S čtverce $ABCD$ a vrchol M rovnoramenného trojúhelníku CDM. Obdobné pozorování platí pro trojici bodů L, S a N.



Konstrukce:

- Kružnice se středem S a poloměrem $3\,\mathrm{cm}$,
- navzájem kolmé přímky procházející bodem S, průsečíky s kružnicí označeny A, C a B, D,
- čtyřúhelník (čtverec) $ABCD$,
- kolmice k přímce AB (totožná s kolmicí k přímce CD) jdoucí bodem S, pata kolmice označena O,
- bod K na polopřímce SO ve vzdálenosti $|AB|$ od bodu O,
- trojúhelník ABK,
- ostatní body a trojúhelníky obdobně.

Výpočet:

Mnohoúhelník $AKBLCMDN$ je složen ze čtverce $ABCD$ a čtyř navzájem shodných rovnoramenných trojúhelníků ABK, BCL, CDM, DAN.

Trojúhelník ABK má jako základnu stranu čtverce $ABCD$ a odpovídající výška je s ní shodná. Proto je obsah trojúhelníku ABK roven polovině obsahu čtverce $ABCD$ a obsah celého mnohoúhelníku $AKBLCMDN$ je roven trojnásobku obsahu čtverce $ABCD$.

Čtverec $ABCD$ je úhlopříčkami rozdělen na čtyři navzájem shodné trojúhelníky ABS, BCS, CDS a DAS. Každý z těchto trojúhelníků je pravoúhlý a rovnoramenný s rameny délky $3\,\mathrm{cm}$. Obsah čtverce je tedy roven

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 3}{2} = 18\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsah mnohoúhelníku $AKBLCMDN$ je tedy roven $3 \cdot 18 = 54\,(\mathrm{cm}^2)$.

Hodnocení. 2 body za rozbor a provedení konstrukce; 4 body za výpočet, z toho 2 body za určení vztahu mezi obsahy trojúhelníku ABK a čtverce $ABCD$, 2 body za vyčíslení obsahů čtverce a celého mnohoúhelníku. Výpočet založený na pouhém měření v obrázku, resp. správný výsledek bez zdůvodnění nehodnoťte.