III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Míša a Jana dnes obě mají narozeniny, dohromady je jim 84 let. Přitom Míša má dvakrát víc let, než měla Jana, když Míša měla tolik let, kolik má Jana dnes.

Kolik let má Míša a kolik Jana? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Informace ze zadání můžeme pomocí jedné neznámé zapsat např. takto:

	dnes	dříve
Míša	$2x$	$84-2x$
Jana	$84-2x$	x

Rozdíl věků je v obou řádcích stejný (rozdíl mezi „dnes“ a „dříve“), což vede k rovnici

$$2x-84+2x=84-2x-x,$$

jejíž řešení je

$$7x=168,$$
$$x=24.$$

Odtud dostáváme $2x=48$ a $84-2x=36$, tzn. Míša má 48 let a Jana 36 let.

Jiné řešení. Vztahy ze zadání je možné s více neznámými vyjádřit např. takto:

	dnes	dříve
Míša	$2x$	y
Jana	y	x

Míše a Janě je dohromady 84 let a rozdíl věků je na obou řádcích stejný. To vede k soustavě dvou rovnic

$$2x+y=84,$$
$$2x-y=y-x,$$

která je ekvivalentní soustavě

$$4x+2y=168,$$
$$3x=2y.$$

Dosazením druhé rovnice do první dostáváme

$$7x=168,$$
$$x=24.$$

Odtud vyplývá $2x=48$ a $y=\frac{3}{2}\cdot 24=36$, to znamená, že Míše je 48 let a Janě 36 let.

Návrh hodnocení. 2 body za vyjádření vztahů obsažených v úvodní tabulce; 2 body za sestavení a vyřešení rovnice, resp. soustavy rovnic; po 1 bodu za dopočítání věků Míši a Jany.

Poznámka. Za neznámou může být zvolen také rozdíl mezi „dnes“ a „dříve“ nebo rozdíl mezi věky Míši a Jany; v takovém případě by úvodní vztahy spolu s ostatními podmínkami vedly k jiné soustavě rovnic s obdobným řešením, tedy i hodnocením.

Ze zadání plyne, že Míša je starší než Jana a že Míšin věk je sudé číslo. Součet jejich věků je 84 let, takže místo uvedeného řešení rovnic je možné postupně zkoušet, která z následující možností vyhovuje ostatním požadavkům ze zadání:

Míša	44	46	48	...
Jana	40	38	36	...

Takto lze snadno odhalit, že vyhovující je třetí možnost. Bez zdůvodnění, že se jedná o jedinou možnost, hodnoťte takové řešení nejvýše 4 body. Za zdůvodnění jednoznačnosti udělte další 2 body podle kvality komentáře.

Z9–III–2

Před Honzou seděly tři zahalené princezny, z nichž jedna byla Zlatovláska. Honza měl za úkol zjistit, která z nich to je.

Princezna v prvním křesle řekla: „Ve třetím křesle Zlatovláska nesedí.“

Princezna ve druhém křesle řekla: „Já Zlatovláska nejsem.“

Princezna ve třetím křesle řekla: „Já jsem Zlatovláska.“

Kouzelná muška Honzovi prozradila, kolik princezen lhalo. Teprve s touto radou dokázal Honza odhalit pravou Zlatovlásku.

Která z princezen byla Zlatovláska? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Rozlišíme tři případy podle toho, kde mohla sedět Zlatovláska:

1. Pokud by Zlatovláska seděla v prvním křesle, potom by
   - princezna v prvním křesle mluvila pravdu,
   - princezna ve druhém křesle mluvila pravdu,
   - princezna ve třetím křesle lhala.
2. Pokud by Zlatovláska seděla ve druhém křesle, potom by
   - princezna v prvním křesle mluvila pravdu,
   - princezna ve druhém křesle lhala,
   - princezna ve třetím křesle lhala.
3. Pokud by Zlatovláska seděla ve třetím křesle, potom by
   - princezna v prvním křesle lhala,
   - princezna ve druhém křesle mluvila pravdu,
   - princezna ve třetím křesle mluvila pravdu.

V prvním a ve třetím případě by lhala jedna princezna, ve druhém případě by lhaly dvě princezny. Protože muščí rada Honzovi pomohla odhalit Zlatovlásku, musela mu muška prozradit, že lhaly dvě princezny. Tomu odpovídá druhý případ, totiž že Zlatovláska seděla ve druhém křesle. (Pokud by muška tvrdila, že lhala jedna princezna, Honza by neuměl rozhodnout mezi prvním a třetím případem.)

Návrh hodnocení. 4 body za rozbor všech případů; 2 body za určení jediného možného případu a umístění Zlatovlásky.

Poznámka. Předchozí rozbor možností lze pojmout opačně, tj. podle pravdivosti, resp. nepravdivosti jednotlivých výroků vyvozovat, kde by měla sedět Zlatovláska. Takto by se muselo diskutovat celkem osm případů:

- Výroky princezen v prvním a ve třetím křesle jsou navzájem v rozporu, tudíž tyto dvě princezny nemohou obě současně mluvit pravdu — tím jsou vyloučeny dva případy.
- Ze stejného důvodu nemohou princezny v prvním a ve třetím křesle obě současně lhát — tím jsou vyloučeny další dva případy.
- Není možné, aby současně princezna ve druhém křesle lhala a princezna ve třetím křesle mluvila pravdu (to by byly obě Zlatovlásky) — tím je vyloučen další případ.

Zbylé tři případy odpovídají právě případům v uvedeném řešení.

Z9–III–3

Velitel svolal ostatní obránce hradu a rozhodl, jak se rozdělí o svou odměnu:

„První si vezme jeden zlaťák a sedminu zbytku, druhý si vezme dva zlaťáky a sedminu nového zbytku a tak dále. Tedy n-tý obránce si vezme n zlaťáků a k tomu ještě sedminu ze zbývajícího množství zlaťáků, dokud nějaké budou.“

Takto se podařilo rozdělit všechny zlaťáky a přitom všichni obránci dostali stejně.

Kolik obránců se dělilo o odměnu? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Označme počet obránců p a uvažujme odzadu. Poslední p-tý obránce si vzal p zlaťáků, a tím byly rozebrány všechny zlaťáky. Předposlední $(p-1)$-tý obránce si vzal $p-1$ zlaťáků a sedminu aktuálního zbytku, který označíme z. Protože oba obránci dostali stejně, platí

$$p-1+\frac{1}{7}\cdot z=p. \tag{1}$$

Odtud dostáváme $\frac{1}{7}\cdot z=1$, tedy $z=7$. Současně však platí, že poslední obránce měl k dispozici šest sedmin tohoto zbytku. To znamená, že

$$p=\frac{6}{7}\cdot z, \tag{2}$$

tedy $p=6$. Pokud se obránci rozdělili o všechny zlaťáky a všichni dostali stejně, muselo jich být šest, každý dostal šest zlaťáků, všech zlaťáků proto bylo $6\cdot 6=36$. Protože jsme dosud uvažovali jenom některé informace ze zadání, je nutné ověřit, že takové dělení je skutečně možné:

	vzal	zůstalo
první	$1+\frac{1}{7}(36-1)=6$	$36-6=30$
druhý	$2+\frac{1}{7}(30-2)=6$	$30-6=24$
třetí	$3+\frac{1}{7}(24-3)=6$	$24-6=18$
čtvrtý	$4+\frac{1}{7}(18-4)=6$	$18-6=12$
pátý	$5+\frac{1}{7}(12-5)=6$	$12-6=6$
šestý	$6+\frac{1}{7}(6-6)=6$	$6-6=0$

O odměnu se dělilo šest obránců.

Návrh hodnocení. 3 body za vztah (1) a určení $z=7$; 2 body za vztah (2) a výsledek $p=6$; 1 bod za ověření.

Jiné řešení. Označme počet všech zlaťáků l a uvažujme odpředu. První obránce si vzal jeden zlaťák a sedminu zbytku, tedy si vzal

$$1+\frac{1}{7}(l-1)=\frac{1}{7}(l+6) \tag{3}$$

zlaťáků a počet zlaťáků se tak zmenšil na $\frac{6}{7}(l-1)$. Druhý obránce si vzal dva zlaťáky a sedminu nového zbytku, tedy si vzal

$$2+\frac{1}{7}\Big(\frac{6}{7}(l-1)-2\Big)=\frac{1}{49}(6l+78) \tag{4}$$

zlaťáků. Protože oba obránci dostali stejně, platí

$$\frac{1}{7}(l+6)=\frac{1}{49}(6l+78). \tag{5}$$

Odtud dostáváme

$$7l+42=6l+78,$$
$$l=36.$$

Rozepsáním jako v tabulce u předchozího postupu se ověří, že jsme nalezli vyhovující řešení a že obránců bylo šest.

Návrh hodnocení. Po 1 bodu za vztah (3), resp. (4) a jeho případnou úpravu; 2 body za sestavení a vyřešení rovnice (5); 2 body za ověření a výsledek.

Jiné řešení. Označme počet obránců p. Poslední p-tý obránce si vzal p zlaťáků, a tím byly rozebrány všechny zlaťáky. Všichni obránci dostali stejně, každý proto dostal p zlaťáků. Obránci se tedy dělili celkem o p^2 zlaťáků.

První obránce si vzal jeden zlaťák a sedminu zbytku, pročež platí

$$1+\frac{1}{7}(p^2-1)=p, \tag{6}$$

tedy

$$p^2-1=7(p-1).$$

Levou stranu v této rovnici lze vyjádřit jako $p^2-1=(p+1)(p-1)$. Ze zadání plyne, že $p>1$, tudíž $p-1>0$ a předchozí rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$p+1=7,$$

tedy $p=6$. Rozepsáním jako v tabulce u prvního postupu se ověří, že jsme nalezli vyhovující řešení. O odměnu se dělilo šest obránců.

Návrh hodnocení. 2 body za vyjádření počtu všech zlaťáků pomocí p; 3 body za sestavení a vyřešení rovnice (6); 1 bod za ověření.

S poznatkem o počtu všech zlaťáků lze zkoušením zjistit, že nejmenší p, pro které lze zlaťáky rozdělit podle uvedených pravidel, je $p=6$. Takové řešení bez zdůvodnění, že se jedná o jedinou možnost, hodnoťte nejvýše 4 body. Za zdůvodnění jednoznačnosti udělte další 2 body podle kvality komentáře.

Jiné řešení. Označme počet všech zlaťáků l. První obránce si vzal jeden zlaťák a sedminu zbytku, pročež onen zbytek $l-1$ musel být dělitelný sedmi. Číslo l je proto tvaru

$$l = 7k + 1 \tag{7}$$

pro nějaké kladné celočíselné k. První obránce si tedy vzal

$$1 + \frac{1}{7}(l-1) = 1 + k$$

zlaťáků. Všichni obránci dostali stejně a poslední dostal právě tolik zlaťáků, jaké bylo jeho pořadové číslo. To znamená, že obránců bylo $k+1$ a každý dostal $k+1$ zlaťáků, celkem se tedy dělili o

$$l = (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \tag{8}$$

zlaťáků. Porovnáním (7) a (8) dostáváme rovnici

$$7k + 1 = k^2 + 2k + 1, \tag{9}$$

neboli $5k = k^2$. Ze zadání plyne, že obránci byli alespoň dva, tudíž $k > 0$ a předchozí rovnice je ekvivalentní s $k = 5$. Rozepsáním jako v tabulce u prvního postupu se ověří, že jsme nalezli vyhovující řešení. O odměnu se dělilo šest obránců.

Návrh hodnocení. 1 bod za vztah (7); 2 body za vztah (8); 2 body za sestavení a vyřešení rovnice (9); 1 bod za ověření.

S poznatkem (7) lze zkoušením zjistit, že nejmenší k, pro které lze zlaťáky rozdělit podle uvedených pravidel, je $k = 5$. Takové řešení bez zdůvodnění, že se jedná o jedinou možnost, hodnoťte nejvýše 4 body. Za zdůvodnění jednoznačnosti udělte další 2 body podle kvality komentáře.

Z9–III–4

V rovnoramenném trojúhelníku ABC je základna AB dlouhá 6 cm a úhel BCA má velikost 45°.

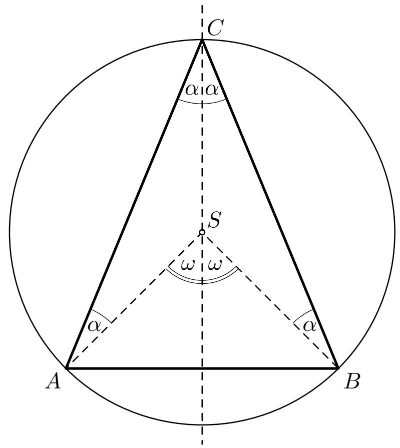
Vypočtěte poloměr kružnice opsané tomuto trojúhelníku. (*L. Růžičková*)

Možné řešení. Střed S kružnice opsané trojúhelníku ABC označíme S. Vzdálenost středu S od každého z bodů A, B, C je rovna hledanému poloměru, který označíme r. Trojúhelníky ACS, BCS a ABS jsou tedy rovnoramenné. Nejprve ukážeme, že trojúhelník ABS je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu S.

Střed S leží na ose základny AB, která je zároveň osou souměrnosti trojúhelníku ABC. Rovnoramenné trojúhelníky ACS a BCS jsou tedy shodné. Proto i úhly SAC, ACS, SCB a CBS jsou navzájem shodné s velikostmi

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 45° = 22°30'. \tag{1}$$

Součet velikostí vnitřních úhlů SAC a ACS v trojúhelníku ACS je roven 45°, a to je také velikost vnějšího úhlu u vrcholu S (na obr. označeného ω). Tento úhel je polovinou úhlu ASB, proto je úhel ASB pravý.



V pravoúhlém trojúhelníku ABS mají obě odvěsny délku r a přepona AB je dlouhá 6 cm. Podle Pythagorovy věty platí

$$r^2 + r^2 = 6^2,$$

tedy $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (cm). Kružnice opsaná trojúhelníku ABC má poloměr $3\sqrt{2}$ cm.

Návrh hodnocení. 1 bod za poznatek o shodnosti trojúhelníků ACS a BCS, resp. úhlů SAC, ACS, SCB a CBS; 3 body za odvození, že úhel ASB je pravý; 2 body za výpočet poloměru (za správnou odpověď považujte kteroukoli z výše uvedených hodnot).

První 4 body udělte i v případě, že velikost úhlu ASB je odvozena s odkazem na větu o středovém a obvodovém úhlu.

Za užití Pythagorovy věty v trojúhelníku ABS bez zdůvodnění, proč je tento trojúhelník pravoúhlý, udělte nejvýše 1 bod.

Poznámky. Po výpočtu (1) se lze k velikosti úhlu ASB dopočítat rozličnými způsoby. Např. určením velikostí vnitřních úhlů u základny v rovnoramenném trojúhelníku ABC,

$$\frac{1}{2}(180° - 45°) = 67°30',$$

poté vyjádřením velikostí vnitřních úhlů u základny v rovnoramenném trojúhelníku ABS,

$$\beta = 67°30' - 22°30' = 45°,$$

odkud je velikost úhlu ASB vypočtena jako

$$\delta = 180° - 2 \cdot 45° = 90°.$$

Jiné odvození může být založeno na určení velikostí zbylých vnitřních úhlů ve shodných rovnoramenných trojúhelnících ACS a BCS,

$$\gamma = 180° - 2 \cdot 22°30' = 135°,$$

odkud je velikost úhlu ASB vypočtena jako

$$\delta = 360^\circ - 2 \cdot 135^\circ = 90^\circ.$$