65. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Honza má v komoře na chalupě krabici s pastelkami, v níž je 5 modrých, 9 červených, 6 zelených a 4 žluté pastelky. Je tma, světlo v komoře nesvítí a Honza u sebe nemá žádný zdroj osvětlení. Barvu pastelek tedy nedokáže rozlišit.

a) Kolik nejméně pastelek musí vzít, aby měl jistotu, že přinese aspoň jednu pastelku od každé barvy?
b) Kolik nejvíce pastelek může vzít, aby měl jistotu, že v krabici zůstane od každé barvy aspoň jedna pastelka?
c) Kolik nejvíce pastelek může vzít, aby měl jistotu, že v krabici zůstane aspoň pět červených pastelek?

(*M. Volfová*)

Možné řešení. Uvažme vždy tu nejméně vhodnou situaci:

a) Kdyby Honza vzal všechny pastelky od všech barev kromě jedné, tato barva by mu stále chyběla. Nejnepříznivější situace nastává, když mu chybí žlutá, protože těchto pastelek je nejméně. Počet všech modrých, červených a zelených pastelek je $9 + 6 + 5 = 20$, Honza proto musí vzít aspoň 21 pastelek.
b) Kdyby Honza vzal všechny pastelky jedné barvy, tato barva by pak v krabici chyběla. Nejnepříznivější situace nastává, když vybírá samé žluté, protože těch je nejméně. Žluté pastelky jsou 4, Honza proto může vzít nejvíce 3 pastelky.
c) Nejnepříznivější situace nastává, když Honza bere jenom červené pastelky. Těch je celkem 9, může tedy vzít nejvíce 4 pastelky.

Návrh hodnocení. Po 1 bodu za každou správnou odpověď; 3 body podle kvality vysvětlení.

Z8–II–2

Děda chová husy, prasata, kozy a slepice — celkem 40 kusů. Na každou kozu připadají 3 husy. Kdyby bylo slepic o 8 méně, bylo by jich stejně jako hus a prasat dohromady. Kdyby děda vyměnil čtvrtinu hus za slepice v poměru 3 slepice za 1 husu, měl by celkem 46 kusů zvířat.

Kolik kterých zvířat děda chová? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Počty jednotlivých druhů zvířat označíme jejich počátečními písmeny. Informace ze zadání můžeme postupně zapsat takto:

$$\begin{aligned} h + p + k + s &= 40, \\ h &= 3k, \\ s - 8 &= h + p, \\ 40 - \frac{1}{4}h + \frac{3}{4}h &= 46. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice plyne $\frac{1}{2}h = 6$, tedy $h = 12$. Z druhé rovnice zjišťujeme, že $k = 4$. Dosazením těchto hodnot do zbylých dvou rovnic dostáváme

$$12 + p + 4 + s = 40, \quad \text{tedy} \quad p + s = 24,$$
$$s - 8 = 12 + p, \quad \text{tedy} \quad s = p + 20.$$

Odtud dále vyplývá

$$p + (p + 20) = 24,$$
$$2p = 4,$$
$$p = 2, \quad \text{a tedy} \quad s = 22.$$

Děda chová 12 hus, 2 prasata, 4 kozy a 22 slepic.

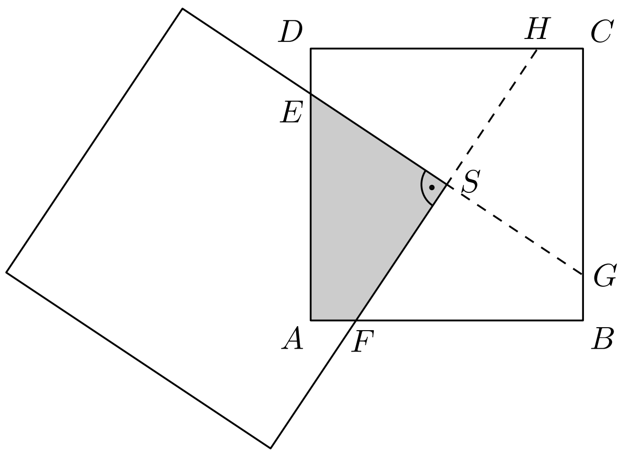
Návrh hodnocení. 2 body za určení počtu hus; 1 bod za určení počtu koz; 3 body za určení počtu prasat a slepic.

Z8–II–3

Dobrákovi pěstovali tulipány na čtvercovém záhonu o straně 6 metrů. Později přistavěli k svému domku čtvercovou terasu se stranou 7 metrů. Jeden vrchol terasy ležel přesně uprostřed tulipánového záhonu a jedna strana terasy dělila stranu tulipánového záhonu v poměru 1 : 5.

V jakém poměru dělila druhá strana terasy druhou stranu záhonu? O kolik metrů čtverečních se stavbou terasy zmenšil záhon tulipánů? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Vrcholy čtverce tulipánového záhonu označíme A, B, C, D, střed tohoto čtverce S a průsečíky stran čtverce se stranami terasy E, F, viz obrázek.

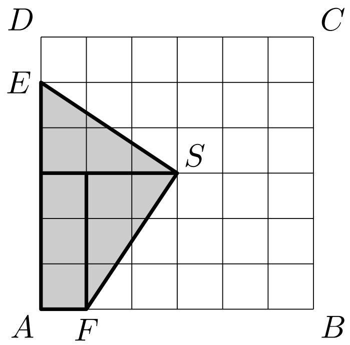


Při otáčení kolem středu S o celočíselné násobky úhlu 90° se čtverec $ABCD$ zobrazuje sám na sebe. Uvažme např. otáčení, při kterém se vrchol A zobrazuje na vrchol B, a tedy strana DA na stranu AB. Body E a F leží právě na těchto stranách, úhel ESF je podle zadání pravý, a proto se bod E zobrazuje na bod F. Obě strany záhonu jsou tedy stranami terasy rozděleny ve stejném poměru, tj.

$$|DE| : |EA| = |AF| : |FB| = 1 : 5.$$

Ještě označme G a H průsečíky přímek SE a SF se zbylými stranami čtverce $ABCD$. Při uvažovaném otáčení se bod B zobrazuje na bod C, bod F se zobrazuje na bod G atd. Zejména všechny čtyřúhelníky $SEAF$, $SFBG$, $SGCH$ a $SHDE$ jsou navzájem shodné. Tyto čtyři čtyřúhelníky tvoří celý čtverec $ABCD$, jehož obsah je $6 \cdot 6 = 36\,(\mathrm{m}^2)$. Obsah každého z nich je proto roven $36 : 4 = 9\,(\mathrm{m}^2)$. Stavbou terasy se záhon tulipánů zmenšil o $9\,\mathrm{m}^2$.

Jiné řešení. Při stejném značení jako výše rozdělme čtverec $ABCD$ pomocnou čtverečkovou sítí na čtverečky se stranami 1 m a předpokládejme, že bod E dělí stranu DA v poměru $1 : 5$. Zejména body E a S jsou uzlovými body čtverečkové sítě, viz obrázek.



Úhel ESF je pravý právě tehdy, když vyznačené pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, což nastává právě tehdy, když F je uzlovým bodem dělicím stranu AB v poměru $1 : 5$. Obě strany záhonu jsou tedy stranami terasy rozděleny ve stejném poměru.

Obsah čtyřúhelníku $SEAF$ je roven součtu obsahů tří vyznačených částí, z nichž každá má obsah $3\,\mathrm{m}^2$. Stavbou terasy se záhon tulipánů zmenšil o $9\,\mathrm{m}^2$.

Návrh hodnocení. 1 bod za určení poměru, v jakém druhá strana terasy dělila druhou stranu záhonu; 2 body za obsah části záhonu zabraného stavbou terasy; 3 body podle kvality komentáře.