

II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Na pohádkovém ostrově žijí draci a kykloповé. Všichni draci jsou červení, tříhlaví a dvounozí. Všichni kykloповé jsou hnědí, jednohlaví a dvounozí. Kykloповé mají jedno oko uprostřed čela, draci mají na každé hlavě dvě oči. Dohromady mají kykloповé a draci 42 oči a 34 nohou.

Kolik draků a kolik kykloповů žije na ostrově? (M. Petrová)

Možné řešení. Protože jak kykloповé, tak draci jsou dvounozí, všech těchto bytostí je celkem 17 ($34 : 2 = 17$).

Kdyby všechny bytosti byly kykloповé, měly by celkem 17 očí. To je o 25 méně, než kolik jich je ve skutečnosti ($42 - 17 = 25$).

Každý drak má o 5 očí víc než kterýkoli kyklop, tedy mezi bytostmi je 5 draků ($25 : 5 = 5$). Zbýlých 12 bytostí jsou kykloповé ($17 - 5 = 12$).

Jiné řešení. Úlohu lze řešit také zkoušením možností: celkem je na ostrově 17 bytostí ($34 : 2 = 17$), mezi nimiž je nanejvýš 7 draků ($42 : 6 = 7$).

V následující tabulce uvádíme v závislosti na počtu draků (d) počet kykloповů ($k = 17 - d$) a celkový počet jejich očí ($6d + k = 5d + 17$), který má být 42:

draci	1	2	3	4	5	6	7
kykloповé	16	15	14	13	12	11	10
celkem očí	22	27	32	37	42	47	52

Jediné vyhovující řešení je vyznačeno silně.

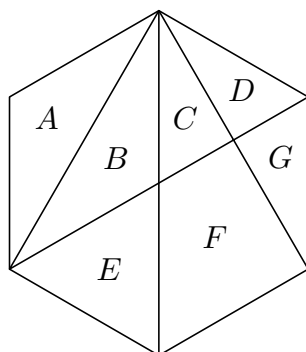
Poznámka. Se značením uvedeným v popisu předchozí tabulky lze počet draků určit jako řešení rovnice $5d + 17 = 42$ (což také odpovídá úvahám v prvním řešení úlohy).

Zkoušení je možné založit na jiném principu, přičemž není nutné znát počet bytostí na ostrově (zato uvažovat počty nohou).

Hodnocení. 2 body za dílčí postřehy (např. celkový počet bytostí či maximální počet draků); 3 body za dořešení úlohy; 1 bod za úplnost a kvalitu komentáře.

Z7-II-2

Pravidelný šestiúhelník je čtyřmi svými úhlopříčkami rozdělen na šest trojúhelníků a jeden čtyřúhelník:

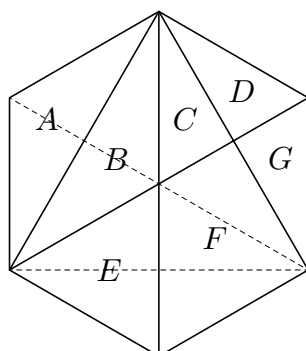


Obsah čtyřúhelníku F je $1,8 \text{ cm}^2$.

Určete obsahy trojúhelníků A , B , C , D , E a G .

(*E. Semerádová*)

Možné řešení. Doplněním chybějících úhlopříček šestiúhelníku získáme jeho rozdělení na 12 navzájem shodných trojúhelníků (úhlopříčky procházející středem šestiúhelníku jej rozdělují na šest shodných rovnostranných trojúhelníků, zbylé tři úhlopříčky představují výšky v těchto trojúhelnících).



Trojúhelníky C , D , G jsou tři z těchto základních trojúhelníků, každý z trojúhelníků A , B , E je tvořen dvěma základními trojúhelníky a čtyřúhelník F třemi.

Obsah čtyřúhelníku F je $1,8 \text{ cm}^2$, tedy obsah základního trojúhelníku je $0,6 \text{ cm}^2$. Každý z trojúhelníků C , D , G má obsah $0,6 \text{ cm}^2$ a každý z trojúhelníků A , B , E má obsah $1,2 \text{ cm}^2$.

Hodnocení. 3 body za pomocné dělení šestiúhelníku a porovnání posuzovaných částí; 2 body za dořešení úlohy; 1 bod za kvalitu komentáře (zahrnující zejména shodnosti pomocných trojúhelníků).

Z7-II-3

Bludička Josefína tančí u močálu, přičemž používá kroky dvojí délky — krátké měří 45 cm, dlouhé 60 cm. Časem si vyšlapala oválnou stezku, po níž za dlouhých nocí tančí stále dokola. Pokud opakuje tři dlouhé kroky dopředu a jeden krátký vzad, pak devadesátým krokem dotančí přesně tam, kde začínala. Pokud opakuje tři krátké kroky dopředu a jeden dlouhý vzad, pak jí také vychází krok přesně tam, kde začínala.

Kolikátým krokem dotančí Josefína na původní místo ve druhém případě?

(*M. Petrová*)

Možné řešení. Jedním velkým čtyřkrokem (třemi dlouhými kroky vpřed a jedním krátkým vzad) se Josefína posune o 135 cm ($3 \cdot 60 - 45 = 135$). Devadesát kroků sestává z 22 velkých čtyřkroků a dvou dlouhých kroků ($90 = 22 \cdot 4 + 2$). Josefínin okruh tedy měří 3 090 cm ($22 \cdot 135 + 2 \cdot 60 = 3\,090$).

Jedním malým čtyřkrokem (třemi krátkými kroky vpřed a jedním dlouhým vzad) se Josefína posune o 75 cm ($3 \cdot 45 - 60 = 75$). Čtyřicet takových čtyřkroků — tedy 160 kroků — ji posune o 3 000 cm ($40 \cdot 75 = 3\,000$), přičemž takto jistě nepřekročí původní místo (před posledním zpátečním krokem je ve vzdálenosti 3 060 cm). Zbývajících 90 cm urazí dvěma následujícími kroky ($2 \cdot 45 = 90$).

Josefína dotančí na původní místo 162. krokem.

Poznámka. Pro přiblížení situace uvádíme několik vzdáleností (v cm) odpovídajících tanečním krokům používaných ve druhém případě:

krok	1	2	3	4	5	6	...
vzdálenost	45	90	135	75	120	165	...

krok	...	158	159	160	161	162	163
vzdálenost	...	3 015	3 060	3 000	3 045	3 090	3 135

Odtud je také patrné, že různým krokům odpovídají různé vzdálenosti.

Hodnocení. 2 body za délku Josefínina okruhu; 2 body za počet kroků ve druhém případě; 2 body za srozumitelnost a kvalitu komentáře.