63. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Tabulka na obrázku má obsahovat sedm přirozených čísel, přičemž v každém šedém poli má být součin čísel ze dvou bílých polí, která s ním sousedí. Čísla v bílých polích jsou navzájem různá a součin čísel v šedých polích je roven 525.

Jaký je součet čísel v šedých polích? Najděte všechny možnosti. (*E. Patáková*)

Možné řešení. Označíme si čísla v bílých polích a pomocí nich vyjádříme, jak vypadají součiny v šedých polích — viz obrázek.

a	$a\cdot b$	b	$b\cdot c$	c	$c\cdot d$	d

Součin čísel v šedých polích je v zavedeném značení roven $a\cdot b\cdot b\cdot c\cdot c\cdot d$, a ten má být roven 525. Jediný způsob, jak vyjádřit toto číslo jako součin šesti přirozených čísel, je

$$525 = 1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7.$$

Porovnáním s předchozím vyjádřením zjišťujeme, že 1 a 5 musí být ve vnitřních bílých polích, zatímco 3 a 7 v krajních. Dvě ze čtyř možných vyplnění tabulky jsou na následujícím obrázku. Zbylá dvě vyplnění jsou osově souměrná s uvedenými, tudíž dávají stejný součet čísel v šedých polích.

3	3	1	5	5	35	7

7	7	1	5	5	15	3

Možné součty čísel v šedých polích jsou $3+5+35=43$ a $7+5+15=27$.

Hodnocení. 1 bod za rozklad čísla 525 na 6 přirozených čísel; 2 body za nalezení jednoho vyplnění; 2 body za nalezení druhého vyplnění; 1 bod za určení správných součtů.

Z7–II–2

Ivana, Majka, Lucka, Saša a Zuzka závodily v četbě téže knihy. Za jednu hodinu stihla Lucka přečíst 32 stran, což bylo přesně v polovině mezi počty stran, které stihly přečíst Saša a Zuzka. Ivana přečetla o 5 stran více než Zuzka a Majka přečetla o 8 stran méně než Saša. Žádná dvě děvčata nepřečetla stejný počet stran a nejhorší výsledek byl 27 stran.

Určete, kolik stran přečetla jednotlivá děvčata. (*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Uvažme, které děvče mohlo přečíst nejméně stran. Lucka to být nemohla, protože její výsledek byl jiný než 27. Saša to být nemohla, protože Majka přečetla o 8 stran méně. Pokud by to byla Zuzka, pak by Ivana musela přečíst $27+5=32$ stran. Tento případ však nastat nemohl, protože každá z dívek přečetla jiný počet stran. Ivana to také být nemohla, neboť Zuzka přečetla o 5 stran méně než ona. Tudíž nejméně stran musela přečíst Majka.

Pokud Majka přečetla 27 stran, pak Saša přečetla $27+8=35$ stran, což je o 3 víc než Lucka. Zuzka potom musela přečíst o 3 strany méně jak Lucka, tedy $32-3=29$ stran. Poslední z dívek, Ivana přečetla $29+5=34$ stran.

Hodnocení. 1 bod za zjištění, že Ivana ani Saša nepřečetly 27 stran; 2 body za zjištění, že Zuzka nepřečetla 27 stran; 3 body za výsledky děvčat.

Poznámka. Řešení je možné znázorňovat graficky podobně jako v domácím kole.

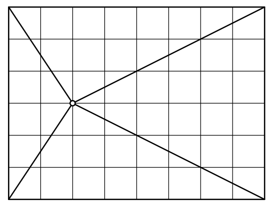
Z7–II–3

Po nárazu kamínku praskla skleněná tabule tak, že vznikly čtyři menší trojúhelníky se společným vrcholem v místě nárazu. Přitom platí, že:

- skleněná tabule měla tvar obdélníku, který byl 8 dm široký a 6 dm vysoký,
- trojúhelník vpravo měl třikrát větší obsah než trojúhelník vlevo,
- trojúhelník vlevo měl dvakrát menší obsah než trojúhelník dole.

Určete vzdálenosti bodu nárazu od stran obdélníku. (*E. Novotná*)

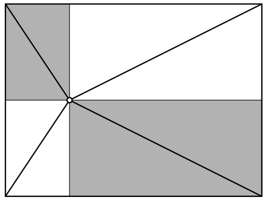
Možné řešení. Trojúhelník vpravo a trojúhelník vlevo mají stejně dlouhou jednu stranu, a to stranu dlouhou 6 dm, která je současně stranou obdélníku. Protože trojúhelník vpravo



má třikrát větší obsah než ten vlevo, musí být velikosti jejich výšek na zmíněné strany ve stejném poměru. Součet těchto výšek je roven šířce obdélníku, jež je 8 dm. Výška levého trojúhelníku, tj. vzdálenost bodu nárazu od levé strany obdélníku, je tedy 2 dm a výška pravého trojúhelníku, tj. vzdálenost bodu nárazu od pravé strany obdélníku, je 6 dm.

Z uvedeného plyne, že trojúhelník vlevo má obsah $6\,\mathrm{dm}^2$ $(\frac{6\cdot 2}{2} = 6)$. Trojúhelník dole má obsah dvakrát větší, tedy $12\,\mathrm{dm}^2$. Strana dolního trojúhelníku, která je současně stranou obdélníku, je dlouhá $8\,\mathrm{dm}$. To znamená, že odpovídající výška tohoto trojúhelníku, tj. vzdálenost bodu nárazu od dolní strany obdélníku, musí být $3\,\mathrm{dm}$ $(\frac{8\cdot 3}{2} = 12)$. Výška obdélníku je $6\,\mathrm{dm}$, tedy vzdálenost bodu nárazu od horní strany obdélníku je také $3\,\mathrm{dm}$ $(6 - 3 = 3)$.

Jiné řešení. Rozdělme obdélník přímkami procházejícími bodem nárazu na čtyři menší pravoúhelníky jako na obrázku.



Každý z těchto pravoúhelníků je prasklinami rozdělen na dva shodné trojúhelníky. Odtud vyplývá, že součet obsahů levého a pravého trojúhelníku je stejný jako součet obsahů horního a dolního trojúhelníku. Tento součet je tedy polovinou obsahu celého obdélníku, tj. $24\,\mathrm{dm}^2$. Ze druhé podmínky v zadání plyne, že obsah trojúhelníku vlevo musí být $6\,\mathrm{dm}^2$ a obsah toho vpravo $18\,\mathrm{dm}^2$. Ze třetí podmínky v zadání plyne, že obsah trojúhelníku dole je $12\,\mathrm{dm}^2$. Obsah trojúhelníku nahoře je tudíž stejný.

U všech trojúhelníků známe obsah a jednu stranu. Odpovídající výšky, tj. vzdálenosti bodu nárazu od jednotlivých stran obdélníku, lze nyní určit stejně jako v druhé části předchozího řešení.

Hodnocení. 3 body za vzdálenosti bodu nárazu od levé a pravé strany obdélníku; 3 body za vzdálenosti bodu nárazu od dolní a horní strany obdélníku. Správné řešení bez komentáře ohodnoťte nejvýše 3 body.