MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pro žáky
základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií

55. ROČNÍK, 2005/2006

http://home.pf.jcu.cz/mo

Milí mladí přátelé,

máte rádi zajímavé matematické úlohy a chtěli byste si v jejich řešení zasoutěžit? Jestliže ano, zveme vás k účasti v matematické olympiádě (MO). Soutěž je dobrovolná a nesouvisí s klasifikací z matematiky. Mohou se jí zúčastnit žáci 5. až 9. ročníků základních škol a žáci jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií vždy ve svých kategoriích. Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka.

ročník			kategorie
ZŠ	8leté G	6leté G	
9	4	2	Z9
8	3	1	Z8
7	2	–	Z7
6	1	–	Z6
5	–	–	Z5

Se souhlasem svého učitele matematiky můžete soutěžit i v některé kategorii určené pro vyšší ročník nebo v některé kategorii A, B, C, P, které jsou určeny pro studenty středních škol. Soutěžní úlohy pro kategorie A, B, C, P jsou uveřejněny v letáku Matematická olympiáda na středních školách.

Průběh soutěže

Soutěž v jednotlivých kategoriích probíhá ve dvou nebo ve třech kolech.

Kategorie Z9 má školní, okresní a krajské kolo.
Kategorie Z8, Z7, Z6 a Z5 mají školní a okresní kolo.

Školní kolo: V tomto vstupním kole soutěže, organizovaném na školách, řeší žáci ve svém volném čase (doma) šest úloh uveřejněných v tomto letáku. Do soutěže budou zařazeni žáci, kteří odevzdají svým učitelům matematiky řešení alespoň čtyř úloh. Všem soutěžícím však doporučujeme, aby se snažili vyřešit všechny úlohy, protože v dalším průběhu soutěže mohou být zadány podobné úlohy.

Řešení úloh odevzdávejte svým učitelům matematiky v těchto termínech:

Kategorie Z5, Z9: první trojici úloh do **4. listopadu 2005** a druhou trojici úloh do **3. ledna 2006**.
Kategorie Z6 až Z8: první trojici úloh do **3. prosince 2005** a druhou trojici úloh do **2. března 2006**.

Vaši učitelé úlohy opraví a ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje*. Pak je s vámi rozeberou, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným, popřípadě i jiným řešením. Úspěšnými řešiteli školního kola se stanou ti soutěžící, kteří budou mít alespoň u čtyř úloh řešení hodnocena výborně nebo dobře.

Práce všech úspěšných řešitelů kategorií Z6 až Z9 zašle vaše škola okresní komisi MO. Ta z nich vybere nejlepší řešitele a pozve je k účasti v okresním kole soutěže. Výběr účastníků v kategorii Z5 provádějí po dohodě s okresní komisí MO školy, které okresní kolo pořádají (viz níže).

Okresní kolo se uskuteční
pro kategorii Z9 **25. ledna 2006**,
pro kategorii Z6 až Z8 **5. dubna 2006**,
pro kategorii Z5 **25. ledna 2006**.

Okresní kolo pro kategorie Z6 až Z9 se pořádá zpravidla v okresním městě, v kategorii Z5 okresní kolo probíhá na několika školách okresu pověřených pořádáním.

Žáci pozvaní do okresního kola kategorie Z9 budou řešit samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Pozvaní žáci kategorií Z6 až Z8 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 2 hodin. Pozvaní žáci kategorie Z5 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 1 hodiny.

Ve všech kategoriích se řešení úloh obodují a podle součtu získaných bodů se sestaví pořadí účastníků okresního kola. Účastníci, kteří získají předepsaný počet bodů (zpravidla aspoň polovinu z dosažitelných bodů), se stanou úspěšnými řešiteli okresního kola a nejlepší z nich budou odměněni.

Krajské kolo pro kategorii Z9 se bude konat **22. března 2006** v některém městě vašeho kraje. Průběh soutěže a její vyhodnocení je stejné jako při okresním kole. Nejlepší účastníci krajského kola jsou vyhlášeni jeho vítězi.

Matematickou olympiádu pořádají *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Akademie věd České republiky*. Soutěž organizuje *ústřední komise MO*, v krajích ji řídí *krajské komise MO* při pobočkách JČMF a v okresech *okresní komise MO*. Na jednotlivých školách ji zajišťují pověření učitelé matematiky. Vy se obracejte na svého učitele matematiky.

Pokyny a rady soutěžícím

Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:

Karel Veselý
8. B
ZŠ, Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
okres Znojmo
2005/2006
Úloha Z8–I–3

Řešení pište tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup, podrobně vysvětlete, jak jste uvažovali. Uvědomte si, že se hodnotí nejen výsledek, ke kterému jste došli, ale hlavně správnost úvah, které k němu vedly.

Práce, které nebudou splňovat tyto podmínky nebo nebudou odevzdány ve stanoveném termínu, nebudou do soutěže přijaty.

Na ukázku uvedeme řešení úlohy z II. kola kategorie Z8 z jednoho z předcházejících ročníků MO:

Úloha Z8–II-1. *Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Jestliže zvětšíme jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.*

Řešení. Délky stran obdélníku označíme a, b. Nový obdélník má délky stran $a+4$, $b-5$. Podle podmínky úlohy pro obsahy obou obdélníků platí

$$2ab = (a+4)(b-5).$$

Postupně upravíme:

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20 \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40 \\ (a-4)(b+5) &= -40 \end{aligned}$$

(Odečteme 20, abychom levou stranu mohli rozložit na součin.)

Řešení najdeme rozkladem čísla -40 na 2 činitele. Přitom musí být $a > 0$, $b > 0$, a tedy $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$. Jsou dvě možnosti:

$$(-2)\cdot 20 = -40 \qquad \text{a} \qquad (-1)\cdot 40 = -40.$$

V prvním případě dostaneme obdélník o stranách $a = 2$, $b = 15$ s obsahem $S = 30$. Nový obdélník pak má strany $a' = 6$, $b' = 10$ a obsah $S' = 60$, tj. $S' = 2S$.

V druhém případě dostaneme obdélník o stranách $a = 3$, $b = 35$ s obsahem $S = 105$. Nový obdélník pak má strany $a' = 7$, $b' = 30$ a obsah $S' = 210$. Opět je $S' = 2S$.

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

Doplň do prázdných políček přirozená čísla od 1 do 20 (každé číslo můžeš použít jen jednou) tak, aby platily matematické vztahy:

$$\square \xrightarrow{:2} \square \xrightarrow{+4} \square \xrightarrow{-3} \square \xrightarrow{:7} \square$$

$$\square \xrightarrow{\times 4} \square \xrightarrow{-2} \square \xrightarrow{:2} \square \xrightarrow{+2} \square$$

$$\square \xrightarrow{+6} \square \xrightarrow{-2} \square \xrightarrow{-1} \square \xrightarrow{:4} \square$$

$$\square \xrightarrow{\times 5} \square \xrightarrow{-1} \square \xrightarrow{:7} \square \xrightarrow{\times 4} \square$$

(*M. Smitková*)

Z5–I–2

Blecha Skákalka skáče po číselné ose. Dokáže však jen dva druhy skoků. Jedním přeskočí o 14 čísel doprava nebo doleva, druhým přeskočí o 18 čísel doprava nebo doleva. Právě stojí na čísle 2.

a) Najdi způsob, jak má blecha skákat, aby se dostala právě čtyřmi skoky na desítku.

b) Blecha tvrdí, že včera byla na třináctce. Mluví pravdu, nebo lže? Zdůvodni. (*M. Dillingerová*)

Z5–I–3

Pohádkový nafukovací čtverec, který umí mluvit, měl před 5 minutami délku strany 8 cm. Při každé lži zvětší svůj obvod dvojnásobně, při každé vyslovené pravdě se zmenší délka každé jeho strany o 2 cm. Za posledních 5 minut dvakrát lhal a dvakrát mluvil pravdu.

a) Jaký největší obvod může teď mít?

b) Jaký nejmenší obvod může teď mít? (*S. Bodláková*)

Z5–I–4

Pepa na pouti koupil čtyři autíčka — bílé, červené, zelené a modré. Bílé stálo dvakrát tolik co červené, zelené třikrát tolik co bílé a za modré zaplatil tolik, co za červené a bílé dohromady. Přitom červené stálo o 70 Kč méně než zelené. Kolik stála jednotlivá autíčka? (*Š. Ptáčková*)

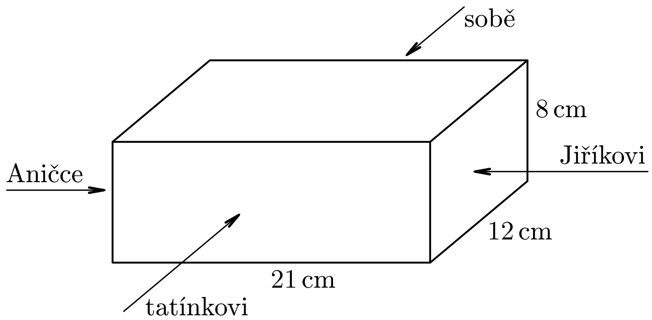
Z5–I–5

Máma stonožka má dvě děti a manžela. Každý z nich má sto nohou a všichni si berou denně čisté ponožky. V sobotu ráno v 6:00 začala máma stonožka dávat špinavé ponožky do pračky. Najednou se jí do pračky vejde 357 ponožek. Tato jedna várka se vypere za dvě a půl hodiny. Zjisti, kdy skončí s praním, pokud víš, že ponožky pere jenom jednou za týden, uložení ponožek do pračky jí trvá 2 minuty a jejich vyndání 3 minuty.

(*S. Bednářová*)

Z5–I–6

Maminka má v lednici cihlu sýra, která je znázorněná na obrázku. Postupně z ní odřezává 1 cm silné plátky na smažení. Nejprve odřízla zepředu plátek s rozměry 21 cm, 8 cm, 1 cm pro tatínka. Pak zboku odřízla pro Jiříka, zezadu pro sebe a nakonec z druhého boku pro Aničku. Napiš, jaké rozměry mají jednotlivé plátky. Urči rozměry zbytku sýra.

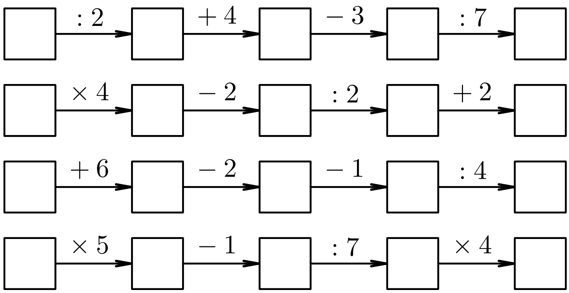


(*M. Dillingerová*)

KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Doplň do prázdných políček přirozená čísla od 1 do 20 (každé číslo můžeš použít jen jednou) tak, aby platily matematické vztahy:



(*M. Smitková*)

Z6–I–2

Sněhurka se sedmi trpaslíky sbírala lískové oříšky. Měla jich tolik, kolik všichni trpaslíci dohromady. Když se vraceli, potkali veverku Loudilku. Sněhurka i každý trpaslík jí dali stejný počet oříšků. Když pak trpaslíci a Sněhurka vysypali zbylé oříšky na stůl, zapsal Prófa jejich počty: 120, 316, 202, 185, 333, 297, 111 a 1 672. Kolik oříšků dostala veverka Loudilka? (*L. Hozová*)

Z6–I–3

Když jsme čísla 80 a 139 vydělili stejným přirozeným číslem, získali jsme zbytky 8 a 13. Jakým číslem jsme dělili? (*M. Volfová*)

Z6–I–4

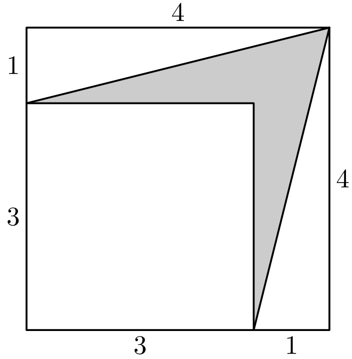
Obvod trojúhelníku je 16 cm. Jak dlouhé může mít strany, když jsou to v centimetrech přirozená čísla a součet délek dvou stran je o 6 cm větší než délka třetí strany? (*L. Hozová*)

Z6–I–5

Maruška dostala pět různě těžkých koláčů. Průměrná hmotnost jednoho koláče byla 200 gramů. Maruška jeden koláč snědla a průměrná hmotnost zbylých koláčů pak byla 160 gramů. Jakou hmotnost měl koláč, který Maruška snědla? (*B. Šťastná*)

Z6–I–6

Urči obsah šedé plochy vyplňující část útvaru mezi dvěma čtverci (rozměry na obrázku jsou v centimetrech). (*P. Tlustý*)



KATEGORIE Z7

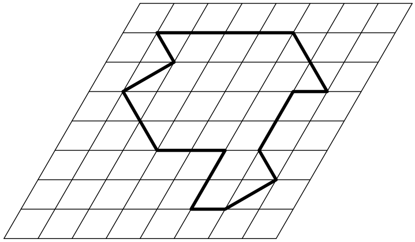
Z7–I–1

Pat a Mat upravovali nový asfalt na cestě. Nejprve s válcem jeli 10 m dopředu, potom 7 m couvli. Pak opět popojeli 10 m dopředu a 7 m couvli atd. Takto pokračovali, než poprvé sjeli z nového asfaltu.

a) Kolik metrů ujeli na novém 540 m dlouhém úseku cesty?
b) Kolikrát přejeli po 19. metru nového asfaltu? (*M. Dillingerová*)

Z7–I–2

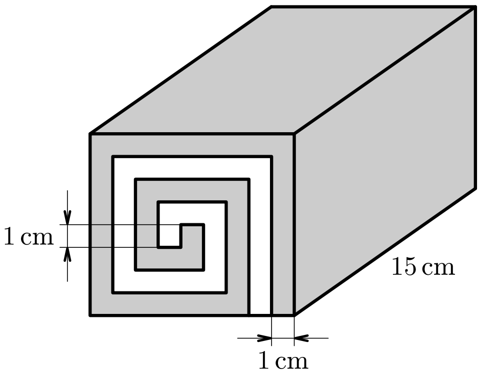
Zjisti obsah a velikosti vnitřních úhlů mnohoúhelníku znázorněného v kosočtvercové síti na obrázku, jestliže víš, že přímky sítě svírají úhel 80° a jeden malý kosočtvereček má obsah 1 cm^2. (Pozor, obrázek je nepřesný!) (*S. Bednářová*)



Z7–I–3

Na obrázku vidíš tzv. *kvadroládu* (speciální druh rolády). Je vyrobena z bílé a hnědé marcipánové hmoty, přičemž obě hmoty mají stejnou tloušťku, a to 1 cm. Celá kvadroláda má délku 15 cm. Prodává se rozkrájená na 10 shodných plátků. Zjisti

a) rozměry jednoho plátku,
b) kolik gramů hnědé hmoty a kolik gramů bílé hmoty je třeba na její přípravu, jestliže víš, že 1 cm^3 marcipánu má hmotnost 2 gramy.



(*S. Bednářová*)

Z7–I–4

Najdi všechna pětimístná přirozená čísla, která se škrtnutím první a poslední číslice zmenší 250krát. (*L. Šimůnek*)

Z7–I–5

Pavel měl za domácí úkol vyjádřit desetinnými čísly zlomky $\frac{3}{7}$ a $\frac{7}{13}$. Chtěl udělat paní učitelce radost a místo do sešitu psal na laťky školního plotu. Nejprve vyjadřoval $\frac{3}{7}$, takže nahoru na první laťku napsal nulu, na druhou desetinnou čárku, na třetí 4. Takto pokračoval, dokud nenapsal číslici na poslední laťku. Potom vyjadřoval $\frac{7}{13}$. Na první laťku dolů napsal nulu, na druhou desetinnou čárku, na třetí 5 atd. Kolik bylo v plotě latěk, víš-li, že číslici 5 napsal přesně 667krát a že na 668 laťkách byla dvojice stejných číslic? (*P. Tlustý, M. Dillingerová*)

Z7–I–6

V Kocourkově jsou dvě směnárny. V současnosti mají tyto kurzy:

1. směnárna

	Nakupujeme	Prodáváme
1 euro	123 Kk	132 Kk

2. směnárna

	Nakupujeme	Prodáváme
1 euro	134 Kk	143 Kk

Slávek Mazaný měl několik eur. V druhé směnárně je vyměnil za kocourkovské koruny a ty potom vyměnil v první směnárně zpět za eura. Takto vydělal 1 euro. Kolik eur měl původně? (*S. Bednářová*)

KATEGORIE Z8

Z8–I–1

Součin ciferného součinu a ciferného součtu dvojmístného přirozeného čísla je 126. Které číslo to je? Najděte všechna možná řešení.

(*M. Raabová*)

Z8–I–2

Paní Zručná se ucházela o místo v perníkárně. Při pohovoru s vedoucím chtěla říci, za kolik minut ozdobí kolik perníků. Byla nervózní, a proto omylem prohodila počet minut s počtem perníků. Vedoucí podle vyslechnutých údajů spočítal, kolik perníků by měla paní Zručná stihnout ozdobit za pětihodinovou pracovní dobu, a tolik jí dal úkolem. Paní Zručné však trvala práce o 2 hodiny a 12 minut déle. Kolik perníků ozdobila?

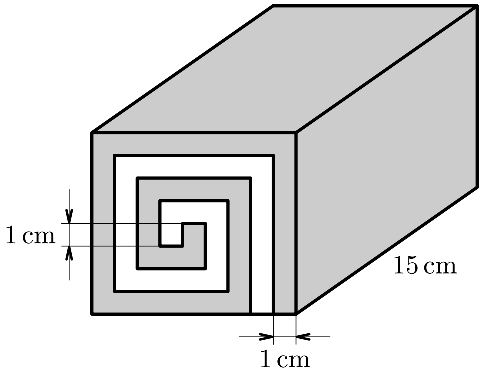
(*L. Šimůnek*)

Z8–I–3

Na obrázku vidíš tzv. *kvadroládu* (speciální druh rolády). Je vyrobena z bílé a hnědé marcipánové hmoty, přičemž obě hmoty mají stejnou tloušťku, a to 1 cm. Celá kvadroláda má délku 15 cm. Prodává se rozkrájená na 10 shodných plátků. Zjisti

a) rozměry jednoho plátku,

b) kolik gramů hnědé hmoty a kolik gramů bílé hmoty je třeba na její přípravu, jestliže víš, že $1\,\mathrm{cm}^3$ marcipánu má hmotnost 2 gramy.



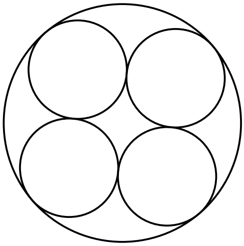
(*S. Bednářová*)

Z8–I–4

Roman psal na list papíru celá čísla do řady tak, že každé následující získával z předchozího střídavě násobením dvěma a odečítáním tří. (Např. řada čísel 1, 2, -1, -2, -5, -10 vyhovuje jeho pravidlu, ale řada 10, 7, 4, 8, 16, 32 jeho pravidlo nesplňuje.) Po chvíli sečetl posledních 5 čísel, která napsal, a vyšlo mu 114. Kterých pět čísel napsal naposledy? (*M. Raabová*)

Z8–I–5

Určete poloměr větší kružnice, víte-li, že malé kružnice mají poloměr 1 cm (kružnice mají celkem osm vzájemných dotyků). (*P. Tlustý*)



Z8–I–6

Žák Pažout měl v loňském ročníku průměr všech známek 4,15. Z nich byly pouze čtyři jedničky, zato právě jedna třetina byly pětky. Kolik známek musel Pažout minimálně dostat? (*L. Šimůnek*)

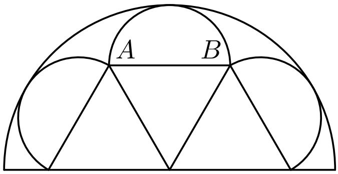
KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Určete počet přirozených čísel od 100 do 999, která mají právě dvě stejné číslice. (*P. Tlustý*)

Z9–I–2

Na obrázku jsou tři rovnostranné trojúhelníky, tři malé polokružnice dotýkající se jedné velké polokružnice o poloměru 1 dm. Určete délku úsečky AB. (*P. Tlustý*)



Z9–I–3

V soustavě souřadnic jsme znázornili body $A[3,2]$, $B[-1,1]$, $C[-2,4]$ a jejich obrazy A', B', C' ve středové souměrnosti se středem v počátku soustavy souřadnic. Vypočítejte obsah šestiúhelníku $ABCA'B'C'$. (*S. Bednářová*)

Z9–I–4

Starý podnikatel zemřel a zanechal po sobě dva bankovní účty, jeden dluh a závěť. V závěti je psáno, že peníze z prvního účtu si mají rozdělit první a druhý syn v poměru 1 : 2, peníze z druhého účtu první a třetí syn v poměru 1 : 3 a dluh mají zaplatit druhý a třetí syn v poměru 2 : 3. Zjistěte, kolik korun bylo na prvním, kolik na druhém účtu a jaký dluh museli synové zaplatit, víte-li, že v konečném důsledku každý z nich získal 123 456 korun. (*S. Bednářová*)

Z9–I–5

Dva rovnostranné papírové trojúhelníky, z nichž menší má obsah $60\,\mathrm{cm}^2$, jsme položili přes sebe tak, že jejich průnikem byl pravoúhlý trojúhelník s obsahem $30\,\mathrm{cm}^2$. Jaký nejmenší obsah mohl mít větší z rovnostranných trojúhelníků? (*S. Bednářová*)

Z9–I–6

Prověrka obsahovala 26 otázek, jež byly rozděleny podle obtížnosti do tří skupin. V první byla každá správná odpověď hodnocena třemi body, ve druhé pěti body a ve třetí osmi body. Maximální počet bodů byl 111. Kolik otázek mohlo být v jednotlivých skupinách? (*L. Šimůnek*)

ÚSTŘEDNÍ VÝBOR MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

55. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Leták pro kategorie Z 5 – Z 9
Vydala Jednota českých matematiků a fyziků
pro vnitřní potřebu Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR
v 1. vydání
Sazbu programem TEX připravil Karel Horák