MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

pro žáky
základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií

54. ROČNÍK, 2004/2005

Milí mladí přátelé,

máte rádi zajímavé matematické úlohy a chtěli byste si v jejich řešení zasoutěžit? Jestliže ano, zveme vás k účasti v matematické olympiádě (MO). Soutěž je dobrovolná a nesouvisí s klasifikací z matematiky. Mohou se jí zúčastnit žáci 5. až 9. ročníků základních škol a žáci jim odpovídajících ročníků víceletých gymnázií vždy ve svých kategoriích. Podrobnější rozdělení uvádí následující tabulka.

ročník			kategorie
ZŠ	8leté G	6leté G	
9	4	2	Z9
8	3	1	Z8
7	2	–	Z7
6	1	–	Z6
5	–	–	Z5

Se souhlasem svého učitele matematiky můžete soutěžit i v některé kategorii určené pro vyšší ročník nebo v některé kategorii A, B, C, P, které jsou určeny pro studenty středních škol. Soutěžní úlohy pro kategorie A, B, C, P jsou uveřejněny v letáku Matematická olympiáda na středních školách.

Průběh soutěže

Soutěž v závislosti na soutěžních kategoriích probíhá v jednom, ve dvou nebo ve třech kolech.

Kategorie Z9 má domácí, okresní a krajské kolo.
Kategorie Z8, Z7 a Z6 mají domácí a okresní kolo.
Kategorie Z5 má domácí a školní kolo.

I. kolo (domácí): Pro všechny kategorie se I. kolo organizuje na školách. Žáci v něm řeší šest úloh uveřejněných v tomto letáku. Do soutěže budou zařazeni žáci, kteří odevzdají svým učitelům matematiky řešení alespoň čtyř úloh. Všem soutěžícím však doporučujeme, aby se snažili vyřešit všechny úlohy, protože v dalším průběhu soutěže mohou být zadány podobné úlohy.

Řešení úloh odevzdávejte svým učitelům matematiky v těchto termínech:

Kategorie Z5, Z9: první trojici úloh do **4. listopadu 2004** a druhou trojici úloh do **3. ledna 2005**.
Kategorie Z6 až Z8: první trojici úloh do **3. prosince 2004** a druhou trojici úloh do **2. března 2005**.

Vaši učitelé úlohy opraví a ohodnotí podle stupnice *1 – výborně, 2 – dobře, 3 – nevyhovuje.* Pak je s vámi rozeberou, vysvětlí vám případné nedostatky a seznámí vás se správným, popřípadě i jiným řešením. Úspěšnými řešiteli I. kola se stanou ti soutěžící, kteří budou mít alespoň u čtyř úloh řešení hodnocena výborně nebo dobře.

Práce všech úspěšných řešitelů kategorií Z6 až Z9 zašle vaše škola okresnímu výboru MO. Ten z nich vybere nejlepší řešitele a pozve je k účasti ve II. kole soutěže. Výběr účastníků II. školního kola v kategorii Z5 provádí po dohodě s okresním výborem MO pořádající škola.

II. kolo se uskuteční
pro kategorii Z9 **26. ledna 2005**,
pro kategorii Z6 až Z8 **6. dubna 2005**,
pro kategorii Z5 **26. ledna 2005**.

II. kolo pro kategorie Z6 až Z9 je okresní a pořádá se zpravidla v okresním městě. II. kolo pro kategorii Z5 je školní a probíhá na pořádající škole.

Pozvaní žáci kategorie Z9 budou řešit samostatně v průběhu 4 hodin 4 soutěžní úlohy. Pozvaní žáci kategorií Z6 až Z8 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 2 hodin. Pozvaní žáci kategorie Z5 budou samostatně řešit 3 úlohy v průběhu 1 hodiny.

III. kolo se pořádá pro kategorii Z9 a koná se **16. března 2005** v některém městě vašem kraji. Pravidla soutěže jsou stejná jako pro II. kolo. Nejlepší účastníci III. kola jsou vyhlášeni jeho vítězi. Jejich jména budou uvedena v ročence 54. ročníku matematické olympiády na základních školách, kterou vydá ústřední výbor MO po skončení soutěže, a na internetu.

Matematickou olympiádu pořádají *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Jednota českých matematiků a fyziků a Matematický ústav Aka-*

demie věd České republiky. Soutěž organizuje *ústřední výbor MO*, v krajích ji řídí *krajské výbory MO* a pobočky JČMF a v okresech okresní výbory MO. Na jednotlivých školách ji zajišťují pověření učitelé matematiky. Vy se obracejte na svého učitele matematiky.

Pokyny a rady soutěžícím

Řešení soutěžních úloh vypracujte čitelně na listy formátu A4. Každou úlohu začněte na novém listě a uveďte vlevo nahoře záhlaví podle vzoru:

Karel Veselý
8. B
ZŠ, Kulaté nám. 9, 629 79 Lužany
okres Znojmo
2004/2005
Úloha Z8–I–3

Řešení pište tak, aby bylo možno sledovat váš myšlenkový postup, podrobně vysvětlete, jak jste uvažovali. Uvědomte si, že se hodnotí nejen výsledek, ke kterému jste došli, ale hlavně správnost úvah, které k němu vedly.

Práce, které nebudou splňovat tyto podmínky nebo nebudou odevzdány ve stanoveném termínu, nebudou do soutěže přijaty.

Informace o MO a zadání úloh najdete též na internetu

`http://home.pf.jcu.cz/mo`

Na ukázku uvedeme **řešení úlohy z II. kola kategorie Z8 z jednoho z předcházejících ročníků MO:**

Úloha Z8–II-1. *Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran. Jestliže zvětšíme jednu jeho stranu o 4 a druhou zmenšíme o 5, dostaneme obdélník s dvojnásobným obsahem. Určete strany daného obdélníku. Najděte všechny možnosti.*

Řešení. **Délky stran obdélníku označíme** a, b**. Nový obdélník má délky stran** $a+4$, $b-5$**. Podle podmínky úlohy pro obsahy obou obdélníků platí**

$$2ab = (a+4)(b-5).$$

Postupně upravíme:

$$\begin{aligned} ab - 4b + 5a &= -20 \\ ab - 4b + 5a - 20 &= -40 \\ (a-4)(b+5) &= -40 \end{aligned}$$

(Odečteme 20, abychom levou stranu mohli rozložit na součin.)

Řešení najdeme rozkladem čísla -40 **na 2 činitele. Přitom musí být** $a > 0$, $b > 0$**, a tedy** $a - 4 > -4$, $b + 5 > 5$**. Jsou dvě možnosti:**

$$(-2)\cdot 20 = -40 \qquad \text{a} \qquad (-1)\cdot 40 = -40.$$

V prvním případě dostaneme obdélník o stranách $a = 2$, $b = 15$ **s obsahem** $S = 30$**. Nový obdélník pak má strany** $a' = 6$, $b' = 10$ **a obsah** $S' = 60$**, tj.** $S' = 2S$.

V druhém případě dostaneme obdélník o stranách $a = 3$, $b = 35$ **s obsahem** $S = 105$**. Nový obdélník pak má strany** $a' = 7$, $b' = 30$ **a obsah** $S' = 210$**. Opět je** $S' = 2S$.

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

Vendelín zavřel do bedny všechna dvoumístná čísla, která při dělení pěti dávají zbytek 3, avšak na jedno z nich zapomněl. Když čísla v bedně správně sečetl, dostal součet 911. Na které číslo zapomněl? (*L. Hozová*)

Z5–I–2

Andulka a Maruška měly sraz přesně v 17.30 před kinem. Andulka si myslela, že jí jdou hodinky o 4 minuty napřed, ale ve skutečnosti se jí zpožďovaly o 8 minut. Maruška si myslela, že se jí hodinky o 8 minut zpožďují, ale šly jí o 4 minuty napřed. Kdy která z dívek přišla na sraz, jestliže si obě myslely, že přišly přesně v 17.30? (*Š. Ptáčková*)

Z5–I–3

Tři princové šli na mnohohlavého draka. První princ mu levou rukou usekl polovinu hlav a pravou rukou ještě další dvě. Totéž udělali se zbylými hlavami druhý a pak i třetí princ. Potom drak padl bezhlavý na zem. Na kolikahlavého draka se princové vydali? (*Š. Ptáčková*)

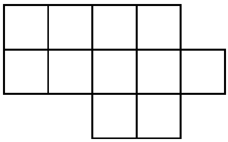
Z5–I–4

Na obrázku je mnohoúhelník složený z jedenácti stejných čtverečků.

a) Zjisti jeho obvod, jestliže víš, že jeden malý čtvereček má obvod 20 cm.

b) Které dva čtverečky mnohoúhelníku je nutno ubrat, aby vznikl nový mnohoúhelník s co největším obvodem? Namaluj alespoň jedno řešení.

(*S. Bednářová*)

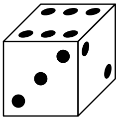


Z5–I–5

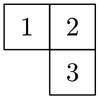
Hrací kostka má puntíky rozmístěny tak, že jejich součet na protilehlých stěnách je vždy 7. Kostka na obr. 1 stojí na stěně s jedním puntíkem, takže na podložce zanechá otisk „1“. Když převalíme kostku doprava na stěnu se dvěma puntíky, zanechá na podložce otisk „2“. Když pak převalíme kostku směrem k sobě, zanechá otisk „3“. Při tomto valení dostaneme stopu na obr. 2. Součet čísel této stopy je 6. Jestliže výchozí postavení kostky je na obr. 1,

a) jaký bude součet na stopě na obr. 3?

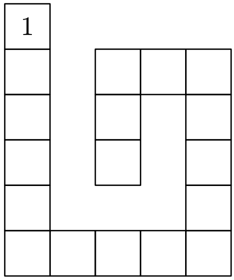
b) Jak bude vypadat stopa, na níž je součet 22? (*L. Hozová*)



Obr. 1



Obr. 2

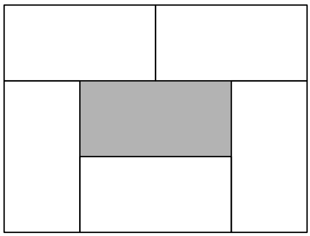


Obr. 3

Z5–I–6

Ivanka si staví z kostek komíny. Všechny kostky jsou stejné a mají rozměry 1 cm, 1 cm a 2 cm. Teď postavila jednopatrový dutý komín z pěti kostek na ploše 12 cm^2 (obrázek). Rozhodla se ale, že postaví dutý komín na ploše 36 cm^2 z 260 takových kostek. Jaký nejvyšší komín mohla postavit, jestliže jí žádná kostka nezbyla a komín byl nahoře rovný?

(*Š. Ptáčková*)



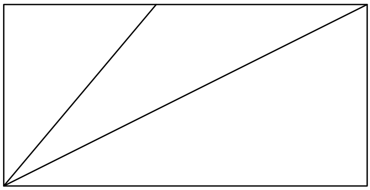
KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Kladné desetinné číslo nazveme *vyvážené*, jestliže je součet číslic ležících před desetinnou čárkou roven součtu číslic za desetinnou čárkou. Např. číslo 25,133 je vyvážené. Napiš a) nejmenší, b) největší vyvážené číslo, jehož žádné dvě číslice nejsou stejné. (*S. Bednářová*)

Z6–I–2

Obdélník jsme rozdělili na tři trojúhelníky jako na obrázku. Odměřili jsme všechny vnitřní úhly v těchto trojúhelnících a získali následující hodnoty: 20°, 30°, 30°, 40°, 50°, 60°, 90°, 90° a 130°. Dopiš je na správná místa v obrázku. (Pozor, obrázek může být nepřesný, nevyplatí se měřit.) (*S. Bednářová*)



Z6–I–3

V zemi „Číselkovo“ žijí jen přirozená čísla. Muži a chlapci jsou sudá čísla, ženy a dívky jsou lichá čísla. Manželé mají hned po svatbě děti, a to všechna čísla, která dělí jejich součin beze zbytku. Kterého nápadníka z čísel 2, 8, 14 si má vybrat slečna Sedmička, jestliže chce mít

a) co nejvíce dětí,
b) stejný počet dcer jako synů? (*M. Dillingerová*)

Z6–I–4

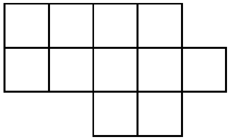
Na kartičce mám napsáno sudé čtyřmístné číslo. Rozstřihnu ji tak, že získám dvě dvoumístná čísla, jejichž součin je 2 562. Které čtyřmístné číslo jsem měla na kartičce? (*M. Raabová*)

Z6–I–5

Na obrázku je mnohoúhelník složený z jedenácti stejných čtverečků.

a) Zjisti jeho obvod, jestliže víš, že jeden malý čtvereček má obvod 2 cm.

b) Které dva čtverečky mnohoúhelníku je nutno přemístit, aby vznikl nový mnohoúhelník s co největším obvodem? (*S. Bednářová*)



Z6–I–6

V Petříkově, Boříkově a Tomíkově žije celkem 6 000 obyvatel. V každé z těchto tří vesnic připadá v průměru na 20 obyvatel 1 pes a na 30 obyvatel 1 kočka. V Petříkově a Boříkově žije celkem 234 psů, v Boříkově a Tomíkově žije celkem 92 koček. Kolik obyvatel mají jednotlivé vesnice?

(*Š. Ptáčková*)

KATEGORIE Z7

Z7–I–1

Dlouhý, Široký a Bystrozraký změřili svou výšku. Zjistili, že Dlouhý je dvakrát vyšší než Široký, výška Bystrozrakého představuje dvě třetiny výšky Dlouhého, ale přitom je o 44 cm vyšší než Široký. Zjisti, jak vysoký je Dlouhý, Široký i Bystrozraký. (*M. Dillingerová*)

Z7–I–2

Je dáno pětimístné číslo dělitelné třemi. Vyškrtnu-li z něj číslice na lichých místech, dostanu dvoumístné číslo. Toto číslo je 67krát menší než číslo získané z původního pětimístného čísla vyškrtnutím číslic na sudých místech. Zjisti, jaké bylo původní pětimístné číslo. (*M. Raabová*)

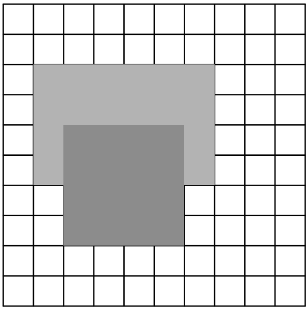
Z7–I–3

V zemi „Číselkovo" žijí jen přirozená čísla. Muži a chlapci jsou sudá čísla, ženy a dívky jsou lichá čísla. Manželé mají hned po svatbě děti, a to všechna čísla, která dělí jejich součin beze zbytku. Kterého nápadníka z čísel 2, 16, 28, 46 si má vybrat slečna Devítka, jestliže chce mít

a) co nejvíce dětí,

b) stejný počet dcer jako synů? (*M. Dillingerová*)

Z7–I–4



Kamilka při kreslení obdélníků ve čtvercové síti narazila na takovouto zajímavou dvojici: Obdélník s rozměry 6 cm a 4 cm a čtverec se stranou délky 4 cm. Nejdříve zakreslila do sítě obdélník a pak čtverec (obr.). S údivem ve svém obrázku objevila, že obsah nezakryté části obdélníku je roven obsahu čtverce a že nezakrytá část obvodu obdélníku je rovna celému obvodu čtverce. Mezi následujícími obdélníky najdi všechny dvojice, které mají obě vlastnosti Kamilčiných obdélníků: 3×9, 4×9, 4×6 a 5×7 (v centimetrech).

(*M. Dillingerová*)

Z7–I–5

Myška Hryzalka našla cihlu sýra. První den snědla $\frac{1}{8}$, druhý den $\frac{1}{7}$ zbytku, třetí den $\frac{1}{6}$ zbytku a čtvrtý den $\frac{1}{5}$ zbytku. Pak už z cihly zůstala jen krychle s povrchem $150\,\mathrm{cm}^2$. Jaký objem měla původní cihla sýra? (*M. Dillingerová*)

Z7–I–6

Archeologové vykopali papyrus se zvláštní tabulkou s výřezem ve tvaru „obráceného Z“ (obrázek). Jde zřejmě o talisman. Měl zajímavou vlastnost: zakroužkujeme-li libovolných pět čísel tak, aby v každém sloupci i řádku bylo zakroužkované právě jedno, a těchto pět čísel sečteme, dostaneme vždy stejný součet. Pokus se zrekonstruovat tento talisman, tzn. doplň čísla na prázdná místa. (*S. Bednářová*)

0				4
	■	3	2	
	■	■	■	9
	8	5	■	
6		7		

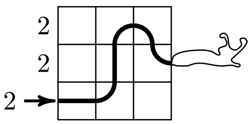
KATEGORIE Z8

Z8–I–1

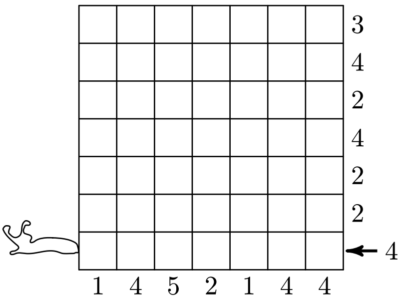
Pořadové číslo dne v měsíci je *smutné*, protože v jistém roce nebylo ani jednou nedělí. Jaké číslo to bylo a na který den v týdnu připadl v tom roce Nový rok? (*M. Volfová*)

Z8–I–2

Slimák lezl po čtvercové síti a zanechal za sebou stopu (obr. 1). Čísla pod sítí a vedle ní udávají počet navštívených čtverečků v daném řádku či sloupci. Na obr. 2 určete dráhu slimáka, víte-li, že nikdy nevlezl dvakrát do stejného čtverečku a že nikdy nelezl šikmo. (*Š. Ptáčková*)



Obr. 1



Obr. 2

Z8–I–3

O lichoběžníku $LICH$ ($LI \parallel CH$) víme, že $LC \perp HI$, $|\sphericalangle ILC| = |\sphericalangle IHC|$ a aritmetický průměr délek jeho základen je 8 cm. Vypočítejte obsah tohoto lichoběžníku. (*S. Bednářová*)

Z8–I–4

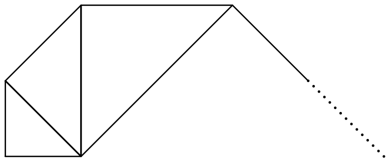
Kolik je mezi čísly $1, 2, 3, \ldots, 999, 1\,000$ takových, která nejsou dělitelná žádným z čísel 2, 3, 4, 5? (*M. Volfová*)

Z8–I–5

Alenka sestavovala „hlemýždí ulitu“ z rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků jako na obrázku. Použila k tomu co nejvíc trojúhelníků, ale žádné dva se nepřekrývaly.

a) Z kolika trojúhelníků byla ulita sestavena?

b) Jaký je obsah největšího trojúhelníku, je-li odvěsna nejmenšího z nich dlouhá 1 cm? (*M. Raabová*)



Z8–I–6

Archeologové vykopali papyrus se zvláštní tabulkou s výřezem ve tvaru „obráceného Z“ (obrázek). Jde zřejmě o talisman. Měl zajímavou vlastnost: zakroužkujeme-li libovolných pět čísel tak, aby v každém sloupci i řádku bylo zakroužkováno právě jedno, a těchto pět čísel sečteme, dostaneme vždy stejný součet. Pokuste se zrekonstruovat tento talisman, tzn. doplňte čísla na prázdná místa. (*S. Bednářová*)

0				4
		3	2	
				9
	8	5		
6		7		

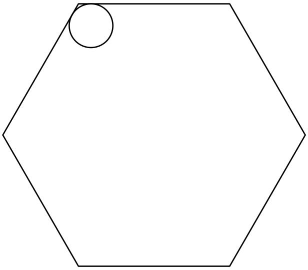
KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Dvoumístné číslo se nazývá *exkluzivní*, jestliže má následující vlastnost: číslice exkluzivního čísla navzájem vynásobíme, po přičtení součtu všech číslic exkluzivního čísla k předchozímu výsledku získáme toto exkluzivní číslo. Například 79 je exkluzivní, neboť $79 = 7\cdot 9+(7+9)$. Najděte všechna exkluzivní čísla. (*P. Tlustý*)

Z9–I–2

Uvnitř pravidelného šestiúhelníku o straně délky $2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ se pohybuje kruh o průměru $1\,\mathrm{cm}$ tak, že se stále dotýká obvodu pravidelného šestiúhelníku. Vypočítejte obsah té části šestiúhelníku, která nemůže být nikdy překryta pohybujícím se kruhem. (*M. Dillingerová*)



Z9–I–3

Kolika způsoby lze vybrat sedm čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 8, 9\}$ tak, aby jejich součet byl dělitelný třemi? (*P. Tlustý*)

Z9–I–4

Jsou dány kruh a čtverec se stejným obsahem. Do daného kruhu vepíšeme čtverec, do daného čtverce vepíšeme kruh. Který z vepsaných obrazců má větší obsah? (*M. Volfová*)

Z9–I–5

Pan Sudý měl sudý počet oveček, pan Lichý lichý počet oveček. Počet všech oveček dohromady tvořil trojmístné číslo, které mělo všechny číslice stejné. Každé ovečce pana Sudého se narodily tři ovečky, každé ovečce pana Lichého dvě ovečky. Jednoho dne však vlk zadávil tři ovečky panu

Sudému. Teď má pan Sudý stejně velké stádo jako pan Lichý. Kolik oveček měl původně každý z chovatelů? (*L. Hozová*)

Z9–I–6

Pět dětí postupně říká: „Včera bylo pondělí.“ „Dnes je čtvrtek.“ „Pozítří bude pátek.“ „Zítra bude sobota.“ „Předevčírem bylo úterý.“ Pokud byste věděli, kolik z dětí lhalo, hned by bylo jasné, který je den. Který je tedy den? (*Š. Ptáčková*)

ÚSTŘEDNÍ VÝBOR MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

54. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Leták pro kategorie Z 5 – Z 9
Vydala Jednota českých matematiků a fyziků
pro vnitřní potřebu Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR
v 1. vydání
Sazbu programem TEX připravil Karel Horák