62. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Jiřina má na papíru napsáno čtyřmístné číslo. Když vymění číslice na místě stovek a jednotek a sečte toto nové číslo s číslem původním, dostane výsledek 3 332. Kdyby však vyměnila číslice na místě tisíců a desítek a sčítala by toto číslo s původním, dostala by výsledek 7 886. Zjistěte, jaké číslo měla Jiřina napsáno na papíru. (*E. Novotná*)

Možné řešení. Číslice v Jiřinině čísle označíme a, b, c, d. Potom informace ze zadání můžeme zapsat takto:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a & d & c & b \\ \hline 3 & 3 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ c & b & a & d \\ \hline 7 & 8 & 8 & 6 \end{array}$$

Z prvního součtu plyne, že $a = 1$ (kdyby $a = 0$, pak by hledané číslo nebylo čtyřmístné, kdyby $a \geqq 2$, pak by součet byl větší než 4 000). Dosadíme do předchozího vyjádření a podobně budeme postupovat dál:

$$\begin{array}{cccc} 1 & b & c & d \\ 1 & d & c & b \\ \hline 3 & 3 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & b & c & d \\ c & b & 1 & d \\ \hline 7 & 8 & 8 & 6 \end{array}$$

Z prvního sloupce ve druhém součtu plyne, že c je 5 nebo 6. Ze třetího sloupce téhož součtu plyne, že c je 6 nebo 7. Proto musí být $c = 6$. Dosadíme do třetího sloupce a vidíme, že v tomto sloupci se do výsledku přenáší jednička ze sloupce posledního. To znamená, že $d + d = 16$, neboli $d = 8$. Po dosazení dostáváme:

$$\begin{array}{cccc} 1 & b & 6 & 8 \\ 1 & 8 & 6 & b \\ \hline 3 & 3 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & b & 6 & 8 \\ 6 & b & 1 & 8 \\ \hline 7 & 8 & 8 & 6 \end{array}$$

Nyní např. z posledního sloupce v prvním součtu vyvodíme, že $b = 4$. Tím jsme určili všechny neznámé, dosadíme za b na ostatních místech a provedeme zkoušku správnosti:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 8 & 6 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 6 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 8 \\ \hline 7 & 8 & 8 & 6 \end{array}$$

Protože všechno vychází, víme, že Jiřina měla na papíru číslo 1 468.

Hodnocení. 1 bod za formulaci problému pomocí neznámých; po 1 bodu za určení každé neznámé; 1 bod za zkoušku.

Z8–II–2

Pan Celer měl na zahrádce dvě stejné nádrže tvaru čtyřbokého hranolu se čtvercovým dnem, v obou dohromady měl 300 litrů vody. V první nádrži tvořila voda přesnou krychli a vyplnila 62,5 % nádrže, v druhé nádrži bylo vody o 50 litrů více. Jaké rozměry měly nádrže pana Celera? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Délku hrany čtvercové podstavy označíme a a výšku hranolu v. Obě veličiny vyjadřujeme v dm; objem nádrže v litrech je roven $V = a^2 \cdot v$. Objem vody v první nádrži byl a^3, ve druhé nádrži $a^3 + 50$ a dohromady 300. Platí tedy

$$a^3 + (a^3 + 50) = 300,$$

odkud snadno vyjádříme $a^3 = 125$ a $a = 5$ (dm).

V první nádrži tedy bylo 125 litrů vody, což představovalo 62,5 % celkového objemu V. Platí proto

$$125 = \frac{62{,}5}{100} \cdot V,$$

odkud vyjádříme $V = 125 \cdot \frac{100}{62{,}5} = 2 \cdot 100 = 200\,(\mathrm{dm}^3)$. Ze vztahu $V = a^2 \cdot v$ nyní dopočítáme poslední neznámou:

$$v = \frac{V}{a^2} = \frac{200}{25} = 8\,(\mathrm{dm}).$$

Rozměry každé z nádrží byly $5\,\mathrm{dm} \times 5\,\mathrm{dm} \times 8\,\mathrm{dm}$.

Hodnocení. 2 body za vyjádření hrany podstavy; 2 body za vyjádření objemu nádrže; 2 body za vyjádření výšky.

Z8–II–3

Šifrovací hry se zúčastnilo 168 hráčů v 50 týmech, které měly dva až pět členů. Nejvíce bylo čtyřčlenných týmů, trojčlenných týmů bylo 20 a hry se zúčastnil alespoň jeden pětičlenný tým. Kolik bylo dvojčlenných, čtyřčlenných a pětičlenných týmů? (*M. Mach*)

Možné řešení. Hry se zúčastnilo 20 trojčlenných týmů, což představuje 60 hráčů. Zbylých 108 hráčů z celkového počtu chceme rozdělit do 30 týmů po dvou, čtyřech a pěti hráčích.

Čtyřčlenných týmů bylo nejvíce, tj. minimálně 21, což představuje minimálně 84 hráčů. Zbylých 24 hráčů potřebujeme rozdělit do 9 týmů po dvou, čtyřech a pěti hráčích.

Pětičlenný tým byl alespoň jeden. Navíc z 24 hráčů lze sestavit nejvýše čtyři pětičlenné týmy. Nyní probereme všechny případy, které mohou nastat:

- Pokud by pětičlenný tým byl právě 1, pak zbývá rozdělit 19 hráčů do 8 týmů po dvou a čtyřech hráčích. To však není možné, protože 19 je liché číslo.
- Pokud by pětičlenné týmy byly 2, pak zbývá rozdělit 14 hráčů do 7 týmů po dvou a čtyřech hráčích. To lze realizovat pouze jediným způsobem — všichni tito hráči budou ve dvoučlenných týmech a žádný další čtyřčlenný tým se nevytvoří.
- Pokud by pětičlenné týmy byly 3, pak zbývá rozdělit 9 hráčů do 6 týmů po dvou a čtyřech hráčích. To však není možné, protože na 6 týmů je potřeba alespoň 12 hráčů.
- Pokud by pětičlenné týmy byly 4, pak zbývá rozdělit 4 hráče do 5 týmů po dvou a čtyřech hráčích. To však není možné, protože na 5 týmů je potřeba alespoň 10 hráčů.

Z uvedené diskuse nám vychází jediná možnost — hry se zúčastnilo 7 dvojčlenných, 20 trojčlenných, 21 čtyřčlenných týmů a 2 pětičlenné týmy.

Hodnocení. 2 body za úvahu, že stačí rozdělit 24 hráčů do 9 týmů po 2, 4 a 5 hráčích; 3 body za zdůvodnění toho, že pětičlenné týmy mohly být jedině dva; 1 body za správný výsledek.