II. kolo kategorie Z6

Z6–II–1

Pat napsal na tabuli příklad:

$$589 + 544 + 80 = 2\,013.$$

Mat chtěl příklad opravit, aby se obě strany skutečně rovnaly, a pátral po neznámém čísle, které pak k prvnímu sčítanci na levé straně přičetl, od druhého sčítance je odečetl a třetího sčítance jím vynásobil. Po provedení těchto operací byl příklad početně správný. Jaké číslo Mat našel? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Přičtením neznámého čísla k prvnímu sčítanci a odečtením téhož čísla od druhého sčítance na levé straně se součet těchto dvou čísel nezmění a je roven $589 + 544 = 1\,133$. Tento mezisoučet je o $2\,013 - 1\,133 = 880$ menší než číslo na pravé straně rovnosti. Proto součin 80 a neznámého Matova čísla má být roven 880. Číslo, které Mat našel, bylo $880 : 80 = 11$.

Hodnocení. 2 body za zjištění, že první dvě operace nemají na výsledek žádný vliv; 2 body za vyjádření rozdílu $2\,013 - 1\,133 = 880$ a vysvětlení jeho významu; 2 body za vyjádření neznámého čísla.

Z6–II–2

Lenka si myslí dvě dvojmístná čísla. Jedno má obě číslice sudé a druhé obě liché. Když obě čísla sečte, dostane opět dvojmístné číslo, které má první číslici sudou a druhou lichou. Navíc nám Lenka prozradila, že všechna dvojmístná čísla jsou násobky tří a jedna ze tří lichých číslic je 9. Jaká čísla si mohla Lenka myslet? Najděte všechny možnosti. (*V. Hucíková*)

Možné řešení. Součet sudého a lichého čísla je vždy číslo liché. Avšak ve výsledném součtu je na místě desítek číslo sudé, což je možné jedině tehdy, když součet číslic na místě jednotek je větší než 10. Současně si uvědomujeme, že pro dva sčítance je tento součet nejvýše 18.

Nyní zjistíme, které z lichých čísel může být 9:

- Pokud by to byla druhá číslice ve výsledku, pak by součet číslic na místě jednotek byl 19, což je příliš mnoho.
- Pokud by to byla první číslice v jednom ze sčítanců, pak by tento sčítanec byl alespoň 91. Sčítanec se sudými číslicemi je zase alespoň 20 (na místě desítek nemůže být 0), takže výsledný součet by nebyl dvojmístný.

Zůstává jediná možnost — 9 je druhá číslice ve sčítanci s lichými číslicemi. Tady zatím žádný problém nevidíme, takže zkoumáme dál:

Sčítanec s lichými číslicemi může být

$$19,\ 39,\ 59,\ 79 \text{ nebo } 99.$$

Z těchto čísel jsou násobkem 3 pouze čísla 39 a 99. Číslo 99 je však příliš veliké (přičtením jakéhokoli čísla bychom dostali trojmístné číslo), takže Lenčino číslo s lichými číslicemi může být jedině 39.

Odtud vidíme, že druhý sčítanec nesmí být větší než 60 (aby součet byl dvojmístný). Toto číslo má mít jenom sudé číslice a navíc z úvodního odstavce víme, že na místě jednotek musí být aspoň 2. Sčítanec se sudými číslicemi tedy může být

$$22,\ 24,\ 26,\ 28,\ 42,\ 44,\ 46 \text{ nebo } 48.$$

Z těchto čísel jsou násobkem 3 pouze čísla 24, 42 a 48. Celkem tedy dostáváme následující tři možnosti:

$$24 + 39 = 63,\quad 42 + 39 = 81,\quad 48 + 39 = 87.$$

Ve všech případech jsou splněny všechny podmínky ze zadání, takže Lenka si mohla myslet kteroukoli z uvedených dvojic sčítanců.

Hodnocení. 1 bod za pozorování, že součet číslic na místě jednotek je větší než 10; 2 body za určení čísla 39 včetně zdůvodnění; 3 body za nalezení sčítanců 24, 42 a 48 včetně zdůvodnění.

Z6–II–3

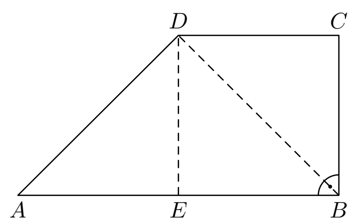
Čtyřúhelník $ABCD$ má následující vlastnosti:

- strany AB a CD jsou rovnoběžné,
- u vrcholu B je pravý úhel,
- trojúhelník ADB je rovnoramenný se základnou AB,
- strany BC a CD jsou dlouhé 10 cm.

Určete obsah tohoto čtyřúhelníku. (*J. Mazák*)

Možné řešení. Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ zkusíme určit jako součet obsahů několika v něm obsažených trojúhelníků.

Protože úhel ABC je pravý a přímky AB a CD jsou rovnoběžné, je také úhel BCD pravý. Patu výšky v trojúhelníku ABD z vrcholu D označíme E.



Rovnoramenný trojúhelník ABD je výškou DE rozdělen na dva shodné trojúhelníky. Navíc čtyřúhelník $BCDE$ je čtverec (je to pravoúhelník a $|BC| = |CD|$) a jeho úhlopříčka

BD jej rozděluje na dva shodné trojúhelníky. Trojúhelníky BCD, BED a AED jsou tedy navzájem shodné a obsah každého z nich je roven polovině obsahu čtverce $BCDE$, tj.

$$\frac{10 \cdot 10}{2} = 50\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je roven součtu obsahů těchto tří trojúhelníků:

$$S_{ABCD} = 3 \cdot 50 = 150\,(\mathrm{cm}^2).$$

Hodnocení. 2 body za zdůvodnění, že čtyřúhelník $BCDE$ je čtverec; 2 body za rozdělení na shodné trojúhelníky; 2 body za vyjádření obsahu.