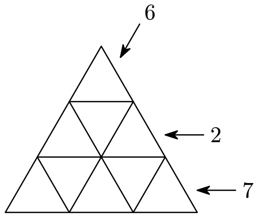
61. ročník Matematické olympiády

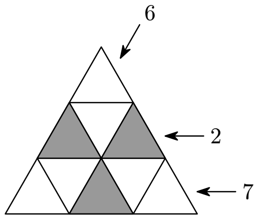
III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

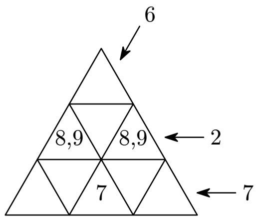
Zjistěte, kolika způsoby lze do jednotlivých políček trojúhelníku na obrázku vepsat čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 tak, aby součet v každém čtyřpolíčkovém trojúhelníku byl 23 a aby na některém políčku ve směru každé šipky bylo vepsáno dané číslo. (*E. Novotná*)



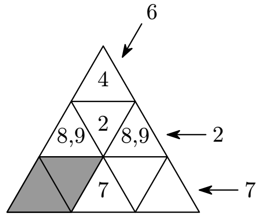
Možné řešení. Součet všech vepsaných čísel je $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. V obrázku jsou právě tři čtyřpolíčkové trojúhelníky a součet čtveřic čísel vepsaných do těchto trojúhelníků je dohromady $3\cdot 23=69$. V tomto součtu jsou však čísla na šedých políčkách započítána dvakrát (každé patří do dvou čtyřpolíčkových trojúhelníků), ostatní čísla jedenkrát. Součet čísel na třech šedých políčkách proto musí být $69-45=24$.



Protože největší možný součet tří vepsaných čísel je právě $9+8+7=24$, v šedých políčkách musejí být čísla 7, 8 a 9. Ze zadání víme, že 7 má být ve spodním řádku, v krajních políčkách druhého řádku potom musí být 8 a 9.

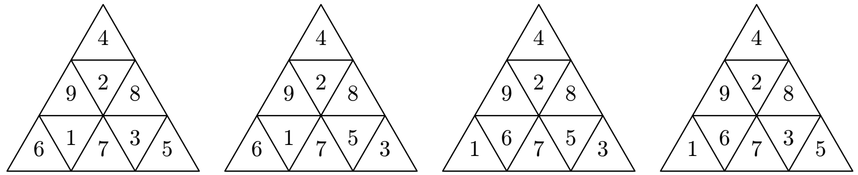


Pro číslo 2 tak zůstává jediné volné místo, viz obrázek. V horním čtyřpolíčkovém trojúhelníku nyní chybí jediné číslo, které tudíž umíme doplnit: $23-8-9-2=4$.



Číslo 6 musí být na některém šedém políčku v předchozím obrázku, patří tedy do levého čtyřpolíčkového trojúhelníku. Kdyby tento trojúhelník obsahoval číslo 8, tak poslední volné políčko by obsahovalo číslo $23-8-7-6=2$, což není možné (2 je již umístěna ve druhém řádku). Levý čtyřpolíčkový trojúhelník proto má ve svém horním políčku číslo 9 a v posledním neobsazeném políčku je $23-9-7-6=1$. V šedých políčkách jsou proto čísla 1 a 6, jež můžeme umístit dvěma způsoby.

Na zatím neobsazených místech v pravém čtyřpolíčkovém trojúhelníku mohou být jedině čísla 3 a 5; součet v tomto trojúhelníku vychází skutečně $8+7+3+5=23$. Čísla 3 a 5 můžeme doplnit opět dvojím způsobem. Úloha má tedy celkem $2\cdot 2=4$ řešení:



Hodnocení. 3 body za vysvětlení, kde se nacházejí čísla 7, 8 a 9; 1 bod za doplnění čísel 2 a 4; 1 bod za doplnění čísel 6 a 1; 1 bod za správný počet řešení.

Pokud řešitel najde náhodně (bez bodovatelného vysvětlení) jedno správné řešení, udělte 1 bod; za dvě řešení 2 body; za tři a čtyři řešení 3 body.

Z9–III–2

Maruška napsala na každou z deseti kartiček právě jedno z deseti po sobě jdoucích přirozených čísel. Jednu kartičku však ztratila. Součet čísel na zbývajících devíti kartičkách byl 2 012. Jaké číslo bylo napsáno na ztracené kartičce? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Nejmenší z deseti napsaných čísel označíme p. Čísla na kartičkách pak byla:

$$p,\ p+1,\ p+2,\ p+3,\ \ldots,\ p+9.$$

Součet čísel na všech deseti kartičkách byl $10p+45$.

Nejprve předpokládejme, že se ztratila kartička s číslem p. Pak by platila následující rovnice:

$$\begin{aligned}(10p+45)-p&=2\,012,\\ 9p&=1\,967.\end{aligned}$$

Z předchozího řádku je zřejmé, že p by v tomto případě nebylo přirozené číslo. Předpoklad, že se ztratila kartička s číslem p, proto zavrhujeme.

Nyní předpokládejme, že se ztratila kartička s číslem $p+1$. Obdobně zavrhneme i tuto možnost:

$$\begin{aligned}(10p+45)-(p+1) &= 2\,012,\\ 9p &= 1\,968.\end{aligned}$$

Stejně odmítneme i předpoklad, že se ztratila kartička s číslem $p+2$:

$$\begin{aligned}(10p+45)-(p+2) &= 2\,012,\\ 9p &= 1\,969.\end{aligned}$$

Ztratit se nemohla ani kartička s číslem $p+3$:

$$\begin{aligned}(10p+45)-(p+3) &= 2\,012,\\ 9p &= 1\,970.\end{aligned}$$

Až za předpokladu, že se ztratila kartička s číslem $p+4$, dojdeme k celočíselné hodnotě p:

$$\begin{aligned}(10p+45)-(p+4) &= 2\,012,\\ 9p &= 1\,971,\\ p &= 219.\end{aligned}$$

Zbývá nám diskutovat dalších pět možností, tedy ztráty kartiček s čísly $p+5$ až $p+9$. V předchozích diskusích docházíme vždy k rovnici, na jejíž levé straně je pouze číslo $9p$. Čísla na pravé straně těchto rovnic se postupně zvětšují o 1. Právě jsme dostali na pravé straně číslo dělitelné devíti, a proto se v následujících pěti diskusích číslo dělitelné devíti vyskytovat nemůže. Úloha má tak jediné řešení, a to že se ztratila kartička s číslem $p+4 = 219+4 = 223$.

Jiné řešení. Nejmenší z deseti napsaných čísel označíme p. Čísla na kartičkách pak byla:

$$p,\ p+1,\ p+2,\ p+3,\ \ldots,\ p+9.$$

Číslo na ztracené kartičce označíme $p+c$, kde c představuje jednomístné přirozené číslo nebo nulu. Součet čísel na všech deseti kartičkách byl $10p+45$. Součet čísel na devíti kartičkách zbylých po ztrátě byl $10p+45-(p+c)$, po úpravě $9p+45-c$. Docházíme tak k rovnici, kterou upravíme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}9p+45-c &= 2\,012,\\ 9p &= 1\,967+c.\end{aligned}$$

Součet na pravé straně této rovnice musí být dělitelný devíti. Při dělení $1\,967 : 9$ dostaneme výsledek 218 a zbytek 5. Platí tedy $1\,967 = 9\cdot 218+5$. Z tohoto rozkladu je zřejmé, že součet $1967+c$ je dělitelný devíti, jedině pokud $c=4$. Neznámá p je pak rovna 219 a číslo na ztracené kartičce bylo $p+c = 219+4 = 223$.

Hodnocení. 1 bod za vyjádření součtu čísel na deseti kartičkách, tj. např. $10p+45$; 2 body za výsledek; 3 body za popis postupu.

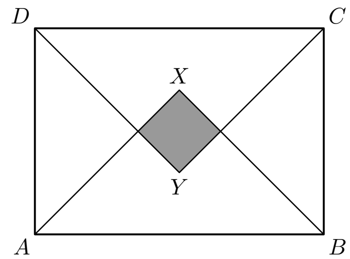
Pokud soutěžící postupuje jako my v prvně uvedeném řešení a po nalezení celočíselného p přestane bez jakéhokoli zdůvodnění prověřovat další možnosti, strhněte 1 bod.

Poznámka. Soutěžící mohou úlohu řešit i „odhadem“ za pomoci aritmetického průměru čísel na devíti zbývajících kartičkách: $2\,012 : 9 = 223$, zbytek 5. Zkusmo vypíší např. devět po sobě jdoucích přirozených čísel takových, aby 223 bylo uprostřed: $219+220+\ldots+227 = 2\,007$. Následně uvažují, zda lze některý sčítanec „zvětšit“ o 5… Pokud v takovéto práci není zdůvodněno, že úloha má skutečně jediné řešení, udělte za ni maximálně 5 bodů.

Z9–III–3

Máme obdélník $ABCD$, viz obrázek. Délky stran AB a BC jsou v poměru $7:5$. Uvnitř obdélníku $ABCD$ leží body X a Y tak, že trojúhelníky ABX a CDY jsou pravoúhlé rovnoramenné s pravými úhly ve vrcholech X a Y. Plocha společná oběma trojúhelníkům je vybarvena šedě a tvoří čtverec o obsahu $72\,\mathrm{cm}^2$. Určete délky stran AB a BC.

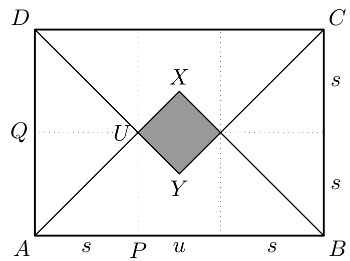
(*L. Šimůnek*)



Možné řešení. Vypočítáme délku u úhlopříčky šedého čtverce, přičemž vyjdeme ze vztahu pro výpočet obsahu čtverce $S = \frac{1}{2}u^2$:

$$u = \sqrt{2S} = \sqrt{2\cdot 72} = \sqrt{144} = 12\,(\mathrm{cm}).$$

Jeden nepojmenovaný vrchol šedého čtverce označíme U, viz obrázek.

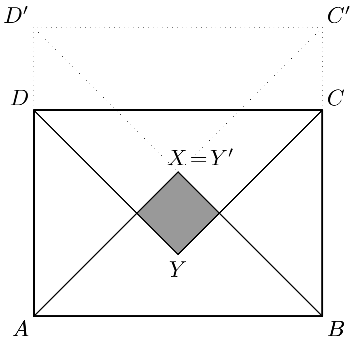


Z bodu U spustíme kolmici ke straně AB a poté ke straně DA. Jejich paty označíme P a Q. Uvědomíme si, že úhel XAB je vnitřním úhlem pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABX a má tedy velikost $45°$. Odtud plyne, že pravoúhelník $APUQ$ je čtverec. Na obrázku ukazujeme tři další analogicky sestrojené čtverce. Délku strany těchto čtverců označíme s. Z obrázku je zřejmé, že $|AB| = 2s+12\,(\mathrm{cm})$ a $|BC| = 2s$. Tyto výrazy dosadíme do poměru uvedeného v zadání. Úpravami vzniklé rovnice získáme $2s$:

$$\begin{aligned}\frac{|AB|}{|BC|} &= \frac{7}{5},\\ \frac{2s+12}{2s} &= \frac{7}{5},\\ 10s+60 &= 14s,\\ 2s &= 30\,(\mathrm{cm}).\end{aligned}$$

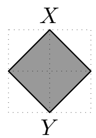
Délka strany AB je $30 + 12 = 42\,(\text{cm})$ a délka strany BC je $30\,\text{cm}$.

Jiné řešení. V zadaném obrazci posuneme trojúhelník CDY tak, aby se bod Y zobrazil do bodu X, viz obrázek. Posuneme jej tedy o délku úsečky XY a stejně jako u předchozího řešení určíme, že tato délka je $12\,\text{cm}$.



Vzhledem k tomu, že trojúhelníky ABX a $C'D'Y'$ jsou pravoúhlé rovnoramenné, vzniklý pravoúhelník $ABC'D'$ musí být čtverec. Úsečka AB představuje podle zadání 7 dílů a úsečka BC 5 dílů. Úsečka BC' je o $12\,\text{cm}$ delší než BC a představuje rovněž 7 dílů. 2 díly jsou tedy $12\,\text{cm}$, 1 díl pak je $6\,\text{cm}$. Délka strany AB je $7 \cdot 6 = 42\,(\text{cm})$ a délka strany BC je $5 \cdot 6 = 30\,(\text{cm})$.

Poznámka. Délka úhlopříčky šedého čtverce může být určena také následovně. Průsečík úhlopříček zobrazíme v osové souměrnosti podle jednotlivých stran čtverce, viz obrázek. Získané čtyři body tvoří vrcholy čtverce, který má dvojnásobný obsah než čtverec šedý, tj. $2 \cdot 72 = 144\,(\text{cm}^2)$. Délka strany vzniklého čtverce, a tedy i délka úsečky XY, je rovna $\sqrt{144} = 12\,(\text{cm})$.



Hodnocení. 1 bod za výpočet úhlopříčky šedého čtverce; 3 body za poznatek a zdůvodnění, že rozdíl délek stran AB a BC je roven délce této úhlopříčky; 2 body za výpočet stran AB a BC.

Z9–III–4

Vojta chtěl na kalkulačce sečíst několik trojmístných přirozených čísel. Na první pokus dostal výsledek 2 224. Pro kontrolu sečetl tato čísla znovu a vyšlo mu 2 198. Počítal tedy ještě jednou a tentokrát dostal součet 2 204. Ono totiž poslední trojmístné číslo bylo prokleté — Vojta při každém pokusu nestiskl nějakou z jeho číslic dostatečnou silou a do kalkulačky tak zadal místo trojmístného čísla vždy jen dvojmístné. K žádným dalším chybám při sčítání nedošlo. Jaký je správný součet Vojtových čísel? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Prokleté číslo nazveme $\overline{ABC}$. Vojta však místo něj přičítal dvojmístná čísla $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, obecně je budeme značit jako ??. Dále označíme jako $****$ součet čísel, která Vojta dokázal sčítat bez překlepu. Platí schematicky vyjádřená sčítání:

$$\begin{array}{r} * * * * \\ ?\,? \\ \hline 2\,2\,2\,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} * * * * \\ ?\,? \\ \hline 2\,1\,9\,8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} * * * * \\ ?\,? \\ \hline 2\,2\,0\,4 \end{array}$$

První a třetí uvedený součet má stejnou číslici na místě jednotek, v těchto případech tedy na místo označené ?? patří čísla $\overline{AC}$ a $\overline{BC}$. Zbylé číslo $\overline{AB}$ tak náleží k součtu 2 198. Součet 2 224 je o 26 větší než 2 198, a proto nemohl vzniknout sečtením čísla $****$ a čísla $\overline{AC}$, které se od čísla $\overline{AB}$ liší jen číslicí na místě jednotek. Čísla $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ tak máme jednoznačně přiřazena k součtům:

$$\begin{array}{r} * * * * \\ B\,C \\ \hline 2\,2\,2\,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} * * * * \\ A\,B \\ \hline 2\,1\,9\,8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} * * * * \\ A\,C \\ \hline 2\,2\,0\,4 \end{array}$$

Podle prvního a třetího součtu platí: $B = A + 2$. Podle druhého a třetího součtu platí: $C = B + 6$, po dosazení předchozího vztahu dostaneme: $C = A + 2 + 6 = A + 8$. Písmeno A je dle zadání nenulové jednomístné číslo, a aby i C vycházelo jako jednomístné, může být A jedině 1. Pak $B = 3$ a $C = 9$. Prokleté číslo bylo tedy 139. Součet $****$ vypočteme například takto: $2\,224 - 39 = 2\,185$. Správně měl Vojtovi vyjít součet $2\,185 + 139 = 2\,324$.

Poznámka. K vyřešení úlohy není nutné stanovovat číslice B a C. K závěru můžeme dojít bez znalosti těchto číslic, tedy bez znalosti prokletého čísla, a sice takto: $2\,224 + \overline{A00} = 2\,224 + 100 = 2\,324$.

Hodnocení. 2 body za přiřazení pozic vynechaných číslic k jednotlivým součtům; 3 body za výpočet vynechaných číslic (v určitém typu postupu může postačit jen číslice A, viz poznámku); 1 bod za správný výsledný součet.