60. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Na kartičku jsem napsala dvojmístné přirozené číslo. Součet číslic tohoto čísla je dělitelný třemi. Odečtu-li od napsaného čísla číslo 27, dostanu jiné dvojmístné přirozené číslo, psané týmiž číslicemi, ale v opačném pořadí. Která čísla jsem mohla napsat na kartičku? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Číslice myšleného dvojmístného čísla označíme takto: x je na místě desítek a y na místě jednotek. V zadání se požaduje, aby součet $x+y$ byl dělitelný třemi a

$$10x + y - 27 = 10y + x,$$

což po úpravě dává

$$9x - 9y = 27,$$
$$x - y = 3.$$

Protože rozdíl číslic má být tři a současně součet má být dělitelný třemi, musí být i obě číslice x a y dělitelné třemi. (To zjevně vidíme, pokud si součet číslic $x+y$ vyjádříme ve tvaru $y+3+y$.) Jediné možnosti tedy jsou $x = 9$, $y = 6$ nebo $x = 6$, $y = 3$, tj. hledané číslo může být 96 nebo 63. (Možnost 30 není přípustná, protože 03 není dvojmístné přirozené číslo.)

Hodnocení. 1 bod za zápis čísla a čísla s opačným pořadím číslic; 2 body za nalezení vztahu $x - y = 3$; 2 body za určení jednoho řešení; 1 bod za určení druhého řešení. (Pokud žák uvádí jako řešení číslo 30, na bodové ohodnocení jeho práce to nemá žádný vliv.)

Jiné řešení. Hledané číslo je větší než to, které získáme záměnou číslic, takže číslice na místě jednotek hledaného čísla má nižší hodnotu než číslice na místě desítek. Navíc víme, že součet těchto dvou číslic je dělitelný třemi. Projdeme tedy všechna dvojmístná čísla, která mají ciferný součet dělitelný třemi a číslici na místě desítek vyšší než číslici na místě jednotek (na místě jednotek samozřejmě nemůže být nula). Ke každému najdeme číslo o 27 menší, a jestliže je zapsané stejnými číslicemi, máme řešení.

$96 - 27 = 69$	1. řešení
$93 - 27 = 66$	
$87 - 27 = 60$	
$84 - 27 = 57$	
$81 - 27 = 54$	
$75 - 27 = 48$	
$72 - 27 = 45$	
$63 - 27 = 36$	2. řešení
$54 - 27 = 27$	
$51 - 27 = 24$	
$42 - 27 = 15$	
$21 - 27 = -6$	

Hledaným číslem může být 96 nebo 63.

Hodnocení. 3 body za vysvětlení principu hledání čísel; 3 body za nalezení obou řešení a vyloučení existence dalších řešení.

Z8–II–2

Martina si vymyslela postup na výrobu číselné posloupnosti. Začala číslem 52. Z něj odvodila další člen posloupnosti takto: $2^2 + 2 \cdot 5 = 4 + 10 = 14$. Potom pokračovala stejným způsobem dále a z čísla 14 dostala $4^2 + 2 \cdot 1 = 16 + 2 = 18$. Vždy tedy vezme číslo, odtrhne z něj číslici na místě jednotek, tuto odtrženou číslici umocní na druhou a k výsledné mocnině přičte dvojnásobek čísla, které zbylo z původního čísla po odtrhnutí poslední číslice. Jaké je 2011. číslo takto vzniklé posloupnosti? (*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Je zřejmé, že objeví-li se v posloupnosti některé číslo podruhé, bude se opakovat celý úsek ohraničený těmito dvěma čísly pořád dokola. Budeme tedy vypisovat čísla posloupnosti tak dlouho, dokud se nezačnou opakovat.

- 1. číslo: 52,
- 2. číslo: 14,
- 3. číslo: 18,
- 4. číslo: $8^2 + 2 \cdot 1 = 66$,
- 5. číslo: $6^2 + 2 \cdot 6 = 48$,
- 6. číslo: $8^2 + 2 \cdot 4 = 72$,
- 7. číslo: $2^2 + 2 \cdot 7 = 18$,
- 8. číslo: $8^2 + 2 \cdot 1 = 66$,
- atd.

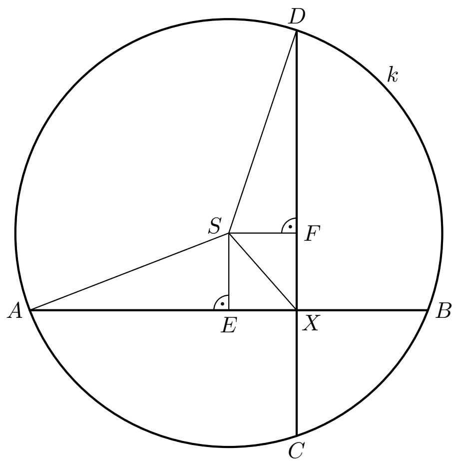
Od třetího čísla se v posloupnosti pravidelně opakují čísla 18, 66, 48 a 72. Číslo 18 je tedy na 3., 7., 11., 15., 19., 23. místě, atd. Toto číslo se bude vyskytovat i na každém místě, které se od kteréhokoli již zmíněného místa liší o nějaký násobek 4. Protože $2011 = 11 + 500 \cdot 4$, bude číslo 18 i na 2011. místě.

Hodnocení. 3 body za nalezení čísel, která se opakují; 1 bod za zjištění, že 2011. číslo je 18; 2 body za vysvětlení, proč je na 2011. místě právě toto číslo.

Z8–II–3

V kružnici k se středem S a poloměrem 52 mm jsou dány dvě na sebe kolmé tětivy AB a CD. Jejich průsečík X je od středu S vzdálen 25 mm. Jak dlouhá je tětiva CD, je-li délka tětivy AB 96 mm? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Středy tětiv AB a CD označíme E a F, viz obrázek. Trojúhelníky AES, EXS a SFD jsou pravoúhlé, $|AE| = \frac{1}{2}|AB| = 48$ mm, $|SX| = 25$ mm a $|SA| = |SD| = 52$ mm.



Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku AES dostáváme

$$|SE|^2 = |SA|^2 - |AE|^2 = 52^2 - 48^2 = 2\,704 - 2\,304 = 400\,(\mathrm{mm}^2).$$

Podle Pythagorovy věty v trojúhelníku EXS dostáváme

$$|EX|^2 = |SX|^2 - |SE|^2 = 25^2 - 400 = 625 - 400 = 225\,(\mathrm{mm}^2).$$

Protože $EXFS$ je obdélník, platí $|SF| = |EX|$; podle Pythagorovy věty v trojúhelníku SFD tak dostáváme

$$|FD|^2 = |SD|^2 - |SF|^2 = 52^2 - 225 = 2\,704 - 225 = 2\,479\,(\mathrm{mm}^2).$$

Odtud vyjádříme $|FD| \doteq 49{,}79$, příp. $|FD| \doteq 50\,(\mathrm{mm})$, pokud pracujeme s přesností na celé mm. Tětiva CD je tedy přibližně 100 mm dlouhá.

Hodnocení. 1 bod za určení $|AE|$; 1 bod za určení $|SE|$; 1 bod za určení $|EX|$; 1 bod za určení $|SF|$; 1 bod za určení $|FD|$; 1 bod za určení $|CD|$.