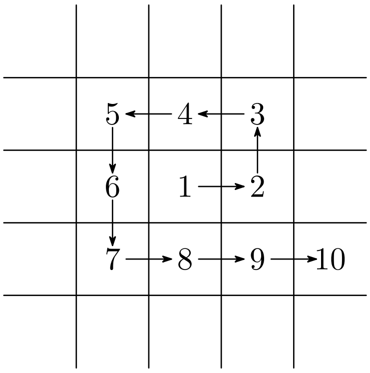
I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Housenka Leona spadla doprostřed čtvercové sítě. Rozhodla se, že poleze „do spirály“ tak, jak je naznačeno na obrázku; na žádném čtverečku nebude dvakrát a žádný čtvereček nevynechá.



Z prvního čtverečku na druhý lezla směrem na východ, z druhého na třetí směrem na sever, ze třetího na čtvrtý směrem na západ, ze čtvrtého na pátý rovněž na západ, z pátého na šestý na jih... Kterým směrem lezla z 81. na 82. čtvereček? (*M. Petrová*)

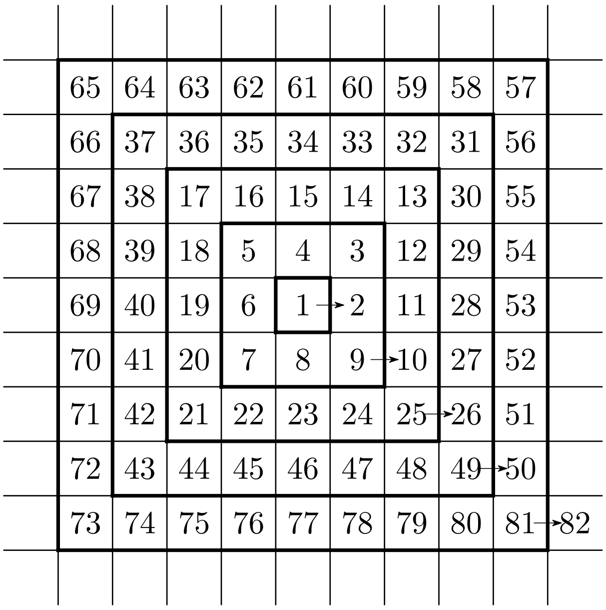
Možné řešení. Celou situaci si můžeme představit tak, že housenka Leona obléžá čtverce. Budeme sledovat, na kterém čtverečku v takovém čtverci skončí a kolika čtverečky již prolezla. Důležité je zjistit, který z těchto čtverců obsahuje 81. čtvereček.

1. kolo: Čtvereček s číslem 1 obejde po osmi okolních čtverečcích. Tím již prolezla 9 čtverečků a prolezla tak všechna políčka ve čtverci 3×3 („startovní“ políčko je přesně uprostřed). Nachází se tak na čtverečku u jihovýchodního vrcholu tohoto čtverce. Z něj leze východním směrem.

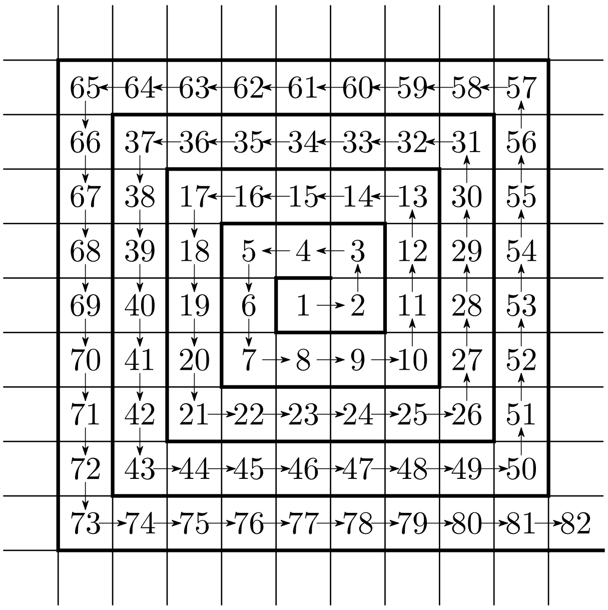
2. kolo: Nyní oblezla předchozí čtverec po okolních čtverečcích. Tím již prolezla všemi čtverečky čtverce 5×5, je opět na čtverečku u jihovýchodního vrcholu tohoto čtverce. Toto políčko má tedy číslo 25 a opět z něj do dalšího čtverce vlézá východním směrem.

3. kolo: Opět oblezla předchozí čtverec, takže již prolezla všemi čtverečky ve čtverci 7×7. Zase skončila na čtverečku u jihovýchodního vrcholu tohoto čtverce. Tento čtvereček má číslo 49 a do dalšího čtverce vylézá východním směrem.

4. kolo: Nyní prolezla všemi čtverečky ve čtverci 9×9 a skončila na čtverečku u jihovýchodního vrcholu čtverce. Tento čtvereček má číslo 81 a zajímá nás, kterým směrem poleze na další čtvereček. Protože odtud přelézá do dalšího čtverce, musí lézt opět východním směrem.



Jiné řešení. Políček je sice dost, ale pořád se dá Leonina cesta nakreslit:

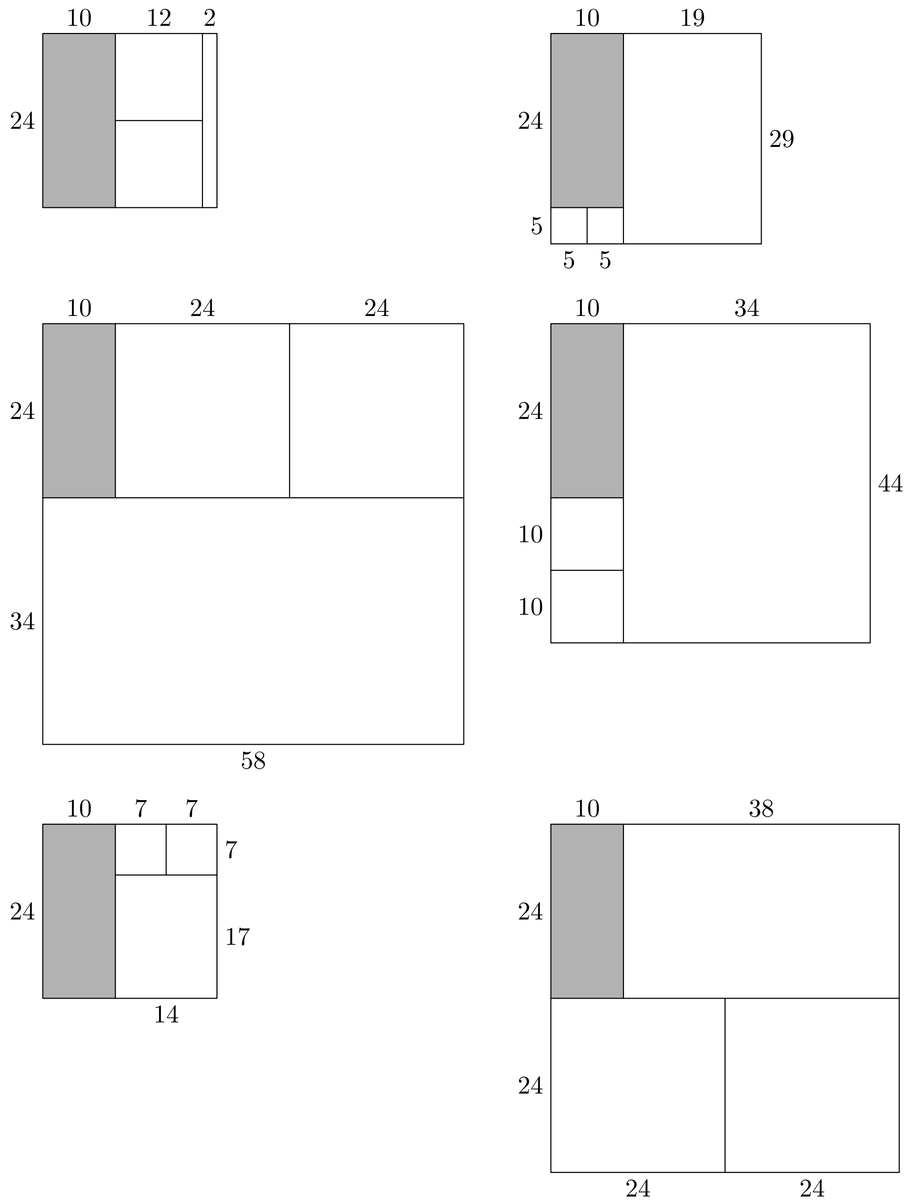


Leona lezla z 81. na 82. políčko směrem na východ.

Z5–I–2

Míša si z papíru vystřihla dva stejné čtverce, jeden obdélník o rozměrech 10 cm × 24 cm a ještě jeden obdélník. Jaké rozměry mohl mít tento obdélník, pokud šlo ze všech čtyř útvarů složit čtverec, aniž by se jednotlivé díly překrývaly? Takových obdélníků lze nalézt několik, uveď alespoň čtyři. (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Při hledání možných rozměrů čtvrtého útvaru je výhodné postupovat takto: Nejprve k obdélníku s rozměry 10 cm×24 cm vhodně zvolíme umístění a velikost dvou stejných čtverců, přičemž si uvědomujeme, že nejdelší strana obrazce vzniklého z těchto tří útvarů musí být zároveň stranou výsledného čtverce. Se znalostí délky této strany pak rozměry čtvrtého útvaru snadno spočítáme.



Rozměry čtvrtého útvaru v cm mohly být 2×24, 19×29, 34×58, 34×44, 14×17 nebo 24×38. Jiné rozměry tento obdélník mít nemohl.

Poznámka. Práci se 4 až 6 možnostmi ohodnoťte 1 — výborně, práci se 2 až 3 možnostmi ohodnoťte 2 — dobře. Uvede-li řešitel pouze jedinou možnost, ohodnoťte takové řešení 3 — nevyhovuje.

Z5–I–3

Vyřeš následující algebrogram a najdi všechna řešení. Stejná písmena nahraď stejnými číslicemi, různá různými.

$$\begin{array}{r} OSEL \\ SEL \\ EL \\ L \\ \hline 1\,0\,0\,3\,4 \end{array}$$

(*M. Volfová*)

Možné řešení. Diskusi začneme od jednotek: Součet čtyř L končí číslicí 4, což je možné pouze pro $L = 1$ $(4 \cdot 1 = 4)$ nebo pro $L = 6$ $(4 \cdot 6 = 24)$. Kdyby $L = 1$, pak by součet u desítek, tj. součet tří E, končil číslicí 3. To by bylo možné jen pro $E = 1$. To však nelze, protože pak by dvě různá písmena L a E byla nahrazena stejnou číslicí 1. L tedy musí být 6.

Pro $L = 6$ je $4 \cdot L = 4 \cdot 6 = 24$; dvě (desítky) připočítáme ke třem E a máme získat číslo, které končí číslicí 3. To znamená, že $3 \cdot E$ končí číslicí 1, a to je možné jen pro $E = 7$.

Pro $E = 7$ je $2 + 3 \cdot E = 2 + 3 \cdot 7 = 23$; dvojku připočítáme k vyššímu řádu, tj. ke dvěma S, a máme získat číslo, které končí číslicí 0. To znamená, že $2 \cdot S$ končí číslicí 8, což je možné pouze tehdy, když $S = 4$ nebo $S = 9$.

a) Pokud $S = 4$, pak $2 + 2 \cdot S = 2 + 2 \cdot 4 = 10$; jedničku připočítáme k O a máme dostat 10. O tedy musí být 9 a řešení je

$$\begin{array}{r} 9476 \\ 476 \\ 76 \\ 6 \\ \hline 10034 \end{array}$$

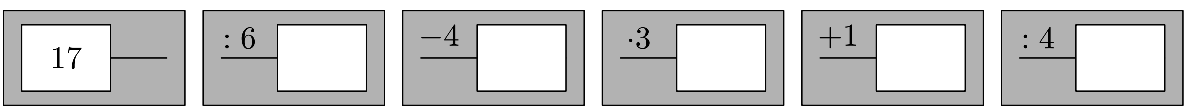
b) Pokud $S = 9$, pak $2 + 2 \cdot S = 2 + 2 \cdot 9 = 20$; dvojku připočítáme k O a máme dostat 10. O tedy musí být 8 a řešení je

$$\begin{array}{r} 8976 \\ 976 \\ 76 \\ 6 \\ \hline 10034 \end{array}$$

Poznámka. Práci obsahující pouze jedno řešení ohodnoťte 2 — dobře.

Z5–I–4

Nina dostala od paní učitelky následující kartičky:



Má z nich všech sestavit příklad pro své spolužáky. Pomoz Nině a sestav jeden takový příklad tak, aby každé dělení vyšlo beze zbytku. Jaký bude výsledek? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Příklad musí začínat kartičkou s číslem 17. Je zřejmé, že jako druhá nemůže být žádná kartička s dělením. Budeme proto postupně zkoušet zbývající tři kartičky. V následující tabulce jsou uvedeny všechny možnosti včetně neúspěšných pokusů; čísla v závorkách ukazují mezivýsledky.

17	−4 (13)	·3 (39)	+1 (40)	: 6 nelze	
17	−4 (13)	·3 (39)	+1 (40)	: 4 (10)	: 6 nelze
17	−4 (13)	·3 (39)	: 4 a 6 nelze		
17	−4 (13)	+1 (14)	·3 (42)	: 6 (7)	: 4 nelze
17	−4 (13)	+1 (14)	·3 (42)	: 4 nelze	
17	−4 (13)	+1 (14)	: 4 a 6 nelze		
17	−4 (13)	: 4 a 6 nelze			
17	**·3** (51)	**−4** (47)	**+1** (48)	: **6** (8)	: **4** (2)
17	**·3** (51)	**−4** (47)	**+1** (48)	: **4** (12)	: **6** (2)
17	·3 (51)	−4 (47)	: 4 a 6 nelze		
17	**·3** (51)	**+1** (52)	**−4** (48)	: **6** (8)	: **4** (2)
17	**·3** (51)	**+1** (52)	**−4** (48)	: **4** (12)	: **6** (2)
17	·3 (51)	+1 (52)	: 6 nelze		
17	·3 (51)	+1 (52)	: 4 (13)	−4 (9)	: 6 nelze
17	·3 (51)	+1 (52)	: 4 (13)	: 6 nelze	
17	·3 (51)	: 4 a 6 nelze			
17	+1 (18)	−4 (14)	·3 (42)	: 6 (7)	: 4 nelze
17	+1 (18)	−4 (14)	·3 (42)	: 4 nelze	
17	+1 (18)	−4 (14)	: 4 a 6 nelze		
17	+1 (18)	·3 (54)	−4 (50)	: 4 a 6 nelze	
17	+1 (18)	·3 (54)	: 6 (9)	−4 (5)	: 4 nelze
17	+1 (18)	·3 (54)	: 6 (9)	: 4 nelze	
17	+1 (18)	·3 (54)	: 4 nelze		
17	+1 (18)	: 6 (3)	−4 nelze		
17	+1 (18)	: 6 (3)	·3 (9)	−4 (5)	: 4 nelze
17	+1 (18)	: 6 (3)	·3 (9)	: 4 nelze	
17	+1 (18)	: 6 (3)	: 4 nelze		
17	+1 (18)	: 4 nelze			

Nina má pouze čtyři možnosti, jak z kartiček sestavit příklad; tyto jsou v předchozí tabulce zvýrazněny tučně, ve všech případech je výsledek 2.

Poznámka. Děti si mohou dané kartičky vyrobit z papíru a pak je zkoušet různě uspořádat. Řešení, ve kterém byl zkoušením nalezen jeden z výše uvedených příkladů a tento příklad je správně vypočítán, považujte za správné a úplné.

Z5–I–5

Naše tři třídy, celkem 84 žáků, šly do kina. Lístek sice stál 50 Kč, ale každý 12. žák měl poloviční slevu a každý 35. vstup zdarma. Kolik stálo vstupné pro všechny žáky?

(*M. Volfová*)

Možné řešení. Protože $84 : 12 = 7$, mělo 7 žáků poloviční slevu, tj. lístek za 25 Kč. Protože $84 : 35 = 2$ (zbytek 14), měli 2 žáci vstup zdarma. Dohromady vstupenky stály

$$7 \cdot 25 + 2 \cdot 0 + (84 - 7 - 2) \cdot 50 = 175 + 0 + 75 \cdot 50 = 3\,925 \text{ (Kč)}.$$

Z5–I–6

Kluci našli starý plán minového pole, viz obrázek. Čísla jsou na polích, kde žádné miny nejsou, a udávají počet zaminovaných sousedících polí. Urči, kolik je v poli celkem min a kde jsou. (Pole sousedí tehdy, mají-li společný vrchol nebo stranu.)

1		2		2
	3		3	
3				3
	2			
			2	

(*M. Volfová*)

Možné řešení. Plán můžeme začít jednoznačně doplňovat jedině od pole s číslem 3 v prvním sloupci nebo od pole s číslem 2 v pravém horním rohu. V obou případech musí být na všech neoznačených sousedních polích miny (ozn. $\star$):

1		2	$\star$	2
$\star$	3		3	$\star$
3	$\star$			3
$\star$	2			
			2	

Potom lze doplnit všechna ostatní pole např. následujícím způsobem:

1	–	2	$\star$	2
$\star$	3		3	$\star$
3	$\star$			3
$\star$	2			
			2	

1	–	2	$\star$	2
$\star$	3		3	$\star$
3	$\star$	–		3
$\star$	2	–		
–	–	–	2	

1	–	2	$\star$	2
$\star$	3	$\star$	3	$\star$
3	$\star$	–		3
$\star$	2	–		
–	–	–	2	

1	–	2	⋆	2
⋆	3	⋆	**3**	⋆
3	⋆	–	**–**	3
⋆	2	–		
–	–	–	2	

1	–	2	⋆	2
⋆	3	⋆	3	⋆
3	⋆	–	–	**3**
⋆	2	–	**⋆**	**⋆**
–	–	–	2	

1	–	2	⋆	2
⋆	3	⋆	3	⋆
3	⋆	–	–	3
⋆	2	–	⋆	⋆
–	–	–	**2**	**–**

Na plánu je celkem 8 min, jejichž rozmístění je ještě zvýrazněno na následujícím obrázku:

			⋆	
⋆		⋆		⋆
	⋆			
⋆			⋆	⋆

59. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Jeníček s Mařenkou chodí k babičce, která má cukrárnu a prodává perníky. Oba dva jí samozřejmě pomáhají, hlavně se zdobením. Za dobu, kdy babička ozdobí pět perníků, ozdobí Mařenka tři a Jeníček dva. Při poslední návštěvě ozdobili všichni tři dohromady pět plných táců. Mařenka s babičkou zdobily po celou dobu, Jeníček kromě zdobení rovnal perníky po dvanácti na jeden tác a odnášel je do spíže. Všichni tři ve stejnou dobu začali i skončili.

1. Kolik perníčků ozdobil Jeníček?
2. Jak dlouho jim celá práce trvala, když babička ozdobí jeden perníček za 4 minuty?
3. Jak dlouho pomáhal Jeníček zdobit?

(*M. Petrová*)

Možné řešení. Nejprve si zjistíme, kolik perníčků ozdobili dohromady. Bylo to 5 táců po dvanácti perníčkách, tedy 60 perníčků ($5 \cdot 12 = 60$).

Kdyby si všichni tři v jeden okamžik vzali perníček a začali ho zdobit, pak si za uvedených podmínek všichni tři zase najednou vezmou perníček až ve chvíli, kdy babička ozdobí pátý, Mařenka třetí a Jeníček druhý, dříve ne. Dokonce ani dva z nich si nevezmou perníček ve stejnou chvíli před uplynutím uvedené doby. Tento časový úsek si pojmenujeme jako jeden „cyklus“. Počet cyklů tedy musí být celé číslo (babička skončila s Mařenkou ve stejnou chvíli).

Nejprve si představíme, že Jeníček se věnoval pouze zdobení a s ničím dalším nepomáhal. Pak by za jeden cyklus všichni tři dohromady ozdobili 10 perníčků. K ozdobení šedesáti perníčků by tedy potřebovali přesně 6 cyklů ($60 : 10 = 6$). Protože ale Jeníček nezdobil celých 6 cyklů (rovnal také perníčky na tácy a ty pak odnášel), musela babička s Mařenkou zdobit alespoň 7 cyklů.

Kdyby pracovaly 8 cyklů, babička by ozdobila 40 perníčků ($8 \cdot 5 = 40$) a Mařenka by ozdobila 24 perníčků ($8 \cdot 3 = 24$). Dohromady by ozdobily 64 perníčků, tedy více než měly. Protože musely dokončit cyklus (jedna by jinak skončila dřív než druhá), nemohlo být těchto cyklů 8 nebo více.

To znamená, že babička s Mařenkou pracovaly právě 7 cyklů. Babička tedy ozdobila 35 perníčků ($7 \cdot 5 = 35$) a Mařenka ozdobila 21 perníčků ($7 \cdot 3 = 21$). Jeníček ozdobil 4 perníčky ($60 - 35 - 21 = 4$).

Jestliže babička ozdobí jeden perníček za 4 minuty, jeden cyklus trvá 20 minut ($4 \cdot 5 = 20$). Celá práce jim tedy trvala 140 minut ($7 \cdot 20 = 140$), tj. 2 hodiny 20 minut.

Protože Jeníček ozdobil 4 perníčky, zdobil celé dva cykly ($4 : 2 = 2$), tj. 40 minut ($2 \cdot 20 = 40$).

Jiné řešení. Úlohu lze řešit i tak, že „vynecháme“ Jeníčkovo zdobení. Babička s Mařenkou ozdobí za jeden cyklus dohromady 8 perníčků, takže cyklů bude nejvýše 7 ($60 : 8 = 7$, zbytek 4). Zbylé 4 perníčky ozdobí Jeníček. Kdyby bylo cyklů pouze 6, zdobil by Jeníček po celou dobu a nemohl by např. odnášet tácy. Méně cyklů samozřejmě být nemohlo. Dál už je vše stejné.

Z6–I–2

Čtyřmístný PIN kód Rastislavova mobilu je zajímavý:

- jednotlivé číslice tvoří prvočísla,
- 1. a 2. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočíslo,
- 2. a 3. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočíslo,
- 3. a 4. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočíslo.

Rastislav zapomněl svůj PIN kód, ale pamatuje si všechny výše uvedené vlastnosti a snaží se zaktivovat vypnutý mobil. Která čísla by měl vyzkoušet? (*M. Petrová*)

Možné řešení. Nejprve si uvědomíme, že všechna jednomístná prvočísla jsou 2, 3, 5 a 7. Dále si zjistíme, že všechna dvojmístná prvočísla, která lze sestavit z těchto číslic, jsou

$$23, 37, 53, 73.$$

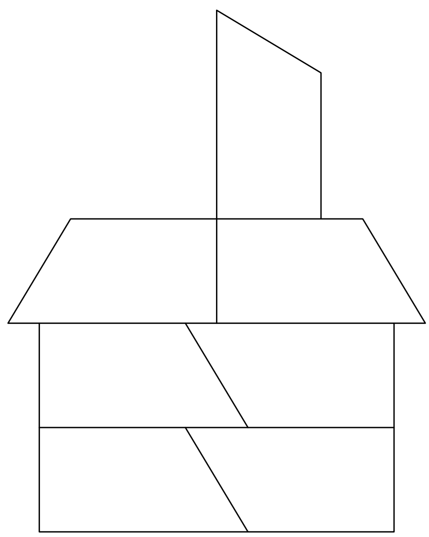
Když vyjádříme Rastislavův PIN jako $ABCD$, ze zadání víme, že AB, BC a CD musí být prvočísla. (Pozor, nikde není řečeno, že A, B, C a D jsou navzájem různé číslice!) Za A postupně dosadíme číslice 2, 3, 5, 7 a budeme zjišťovat, zda a jakými číslicemi lze nahradit B, C, D, abychom vyhověli uvedeným požadavkům. Vše je shrnuto v následující tabulce:

A	B	C	D	PIN
2	3	7	3	2373
3	7	3	7	3737
5	3	7	3	5373
7	3	7	3	7373

Rastislav by měl vyzkoušet následující čtyři čísla: 2373, 3737, 5373 a 7373.

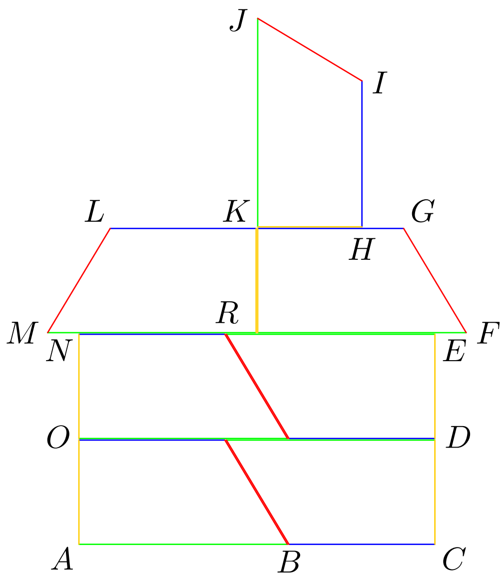
Z6–I–3

Na následujícím obrázku je útvar složený ze sedmi stejných čtyřúhelníkových dílků stavebnice. Jaký je obvod tohoto útvaru, jestliže obvod jednoho čtyřúhelníkového dílku je 17 cm?



(*K. Pazourek*)

Možné řešení. Obarvěme jednotlivé strany dílků následovně: nejdelší stranu zeleně, s ní rovnoběžnou stranu modře, na ně kolmou stranu žlutě a zbývající stranu červeně; délky odpovídajících stran budeme značit zkráceně z, m, $ž$ a $č$. Dále označme vybrané „vrcholy“ jednotlivých dílků jako na následujícím obrázku:



Obvod obrazce je tvořen:

- 3 modrými úsečkami BC, HI a KL, jejichž délky jsou m,
- 2 zelenými úsečkami AB a JK, jejichž délky jsou z,
- 4 žlutými úsečkami CD, DE, NO a OA, jejichž délky jsou $ž$,
- 3 červenými úsečkami FG, IJ a LM, jejichž délky jsou $č$,
- 2 shodnými úsečkami EF a MN a 1 úsečkou GH, jejichž délky zatím neznáme.

Délky úseček MN a EF spolu se zelenou stranou ER a modrou stranou RN dávají úsečku MF, která je tvořena dvěma zelenými stranami. Jinými slovy,

$$|EF| + |MN| = z + z - (z + m) = z - m.$$

Délku modré strany KG můžeme vyjádřit jako součet délek žluté strany KH a úsečky GH, tedy

$$|GH| = m - ž.$$

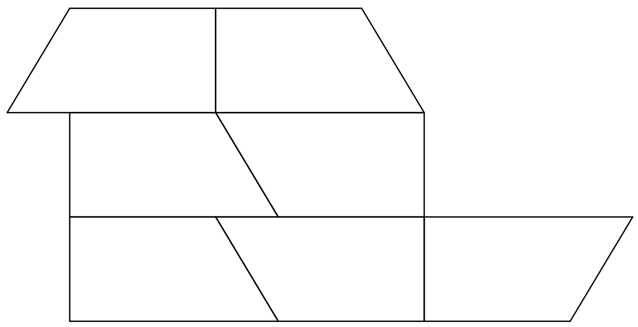
Dohromady, obvod obrazce je

$$3m + 2z + 4ž + 3č + (z - m) + (m - ž) = 3m + 3z + 3ž + 3č = 3(m + z + ž + č).$$

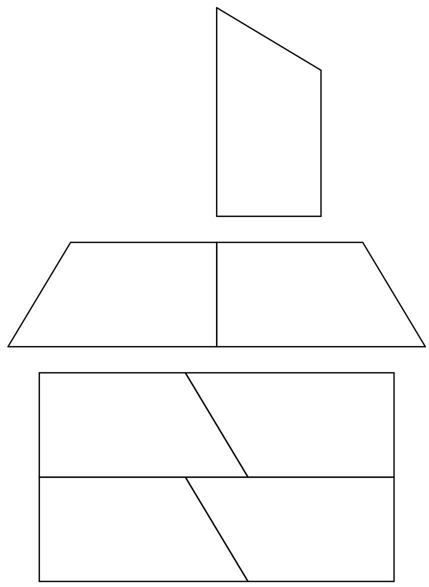
Dostali jsme tak trojnásobek obvodu jednoho čtyřúhelníkového dílku, tedy obvod celého obrazce je roven

$$3 \cdot 17 = 51\,(\mathrm{cm}).$$

Poznámka. Pokud nejprve posuneme některé části obrazce tak, aby obvod zůstal zachován, mohou se některé úvahy zjednodušit, viz např. následující obrázek.



Jiné řešení. Oddělme „komín“ od „střechy“ a „střechu“ od „zdí“ tak, jak ukazuje obrázek.



Součet obvodů těchto tří útvarů určíme snadno (použijeme značení m, z, $ž$, $č$ jako výše):

$$5m + 5z + 5ž + 3č.$$

Uvedený součet je oproti obvodu původního útvaru větší o dvě délky $ž$, což způsobilo oddělení „komínu“, a o dva součty délek $m + z$, což způsobilo oddělení „zdí“. Obvod původního útvaru je tedy

$$(5m + 5z + 5ž + 3č) - ž - ž - (m + z) - (m + z) = 3m + 3z + 3ž + 3č.$$

Vidíme, že původní útvar má třikrát větší obvod než čtyřúhelníkový dílek, tj. $3 \cdot 17 = 51\,(\mathrm{cm})$.

Z6–I–4

Tatínek se rozhodl, že bude dávat svému synovi Mojmírovi vždy jedenkrát za měsíc kapesné. První kapesné dostal Mojmír v lednu. Tatínek každý měsíc kapesné zvyšoval vždy o 4 Kč. Kdyby Mojmír neutrácel, měl by po dvanáctém kapesném před Vánocemi 900 Kč. Kolik Kč dostal Mojmír při prvním kapesném v lednu? (*L. Hozová*)

Možné řešení. Označme výši lednového kapesného v Kč jako x. V únoru Mojmír dostal $x + 4$, v březnu $x + 8$, v dubnu $x + 12$, $\ldots$, v prosinci $x + 44$. Podle zadání víme, že

$$12x + (4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32 + 36 + 40 + 44) = 900.$$

Po úpravách dostáváme:

$$\begin{aligned} 12x + 264 &= 900,\\ 12x &= 636,\\ x &= 53. \end{aligned}$$

Mojmír v lednu dostal 53 Kč.

Z6–I–5

Doplňte místo hvězdiček číslice tak, aby součet výsledků následujících dvou příkladů byl 5 842:

$$\begin{array}{r} \ast 2 \ast 7\\ 3 \ast 4 \ast\\ \hline 4 \ast 0 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \ast 9 \ast\\ - \ast 2 \ast 4\\ \hline \ast 5 4 \ast \end{array}$$

(*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Doplňujeme postupně jednotlivé číslice; některé lze doplnit nezávisle na ostatním přímo v prvním příkladě, některé ve druhém, číslice pod čarou doplňujeme podle informace o součtu výsledků obou příkladů. Postupovat můžeme např. následujícím způsobem:

$$\begin{array}{r} \ast 2 \ast 7\\ 3 \ast 4 \mathbf{3}\\ \hline 4 \ast 0 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \ast 9 \ast\\ - \ast 2 \ast 4\\ \hline \ast 5 4 \ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ast 2 \mathbf{5} 7\\ 3 \ast 4 3\\ \hline 4 \ast 0 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \ast 9 \ast\\ - \ast 2 \ast 4\\ \hline \ast 5 4 \ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ast 2 5 7\\ 3 \ast 4 3\\ \hline 4 \ast 0 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \ast 9 \ast\\ - \ast 2 \ast 4\\ \hline \ast 5 4 \mathbf{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ast 2 5 7\\ 3 \ast 4 3\\ \hline 4 \ast 0 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \ast 9 \mathbf{6}\\ - \ast 2 \ast 4\\ \hline \ast 5 4 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ast 257 \\ 3\ast 43 \\ \hline 4\ast 00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ast 96 \\ -\ast 2\mathbf{5}4 \\ \hline \ast 542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ast 257 \\ 3\ast 43 \\ \hline 4\ast 00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\mathbf{7}96 \\ -\ast 254 \\ \hline \ast 542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ast 257 \\ 3\ast 43 \\ \hline 4\mathbf{3}00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796 \\ -\ast 254 \\ \hline \ast 542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ast 257 \\ 3\mathbf{0}43 \\ \hline 4300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796 \\ -\ast 254 \\ \hline \ast 542 \end{array}$$

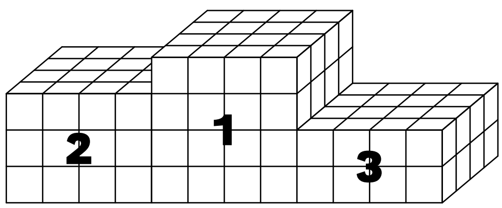
$$\begin{array}{r} \mathbf{1}257 \\ 3043 \\ \hline 4300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796 \\ -\ast 254 \\ \hline \ast 542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257 \\ 3043 \\ \hline 4300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796 \\ -\ast 254 \\ \hline \mathbf{1}542 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257 \\ 3043 \\ \hline 4300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2796 \\ -\mathbf{1}254 \\ \hline 1542 \end{array}$$

Z6–I–6

Na školní olympiádu vytvořili žáci 6.B stupně vítězů z dřevěných krychlí, viz obrázek. Kolik krychlí celkem použili?



Sestavené stupně natřeli po celém povrchu (kromě podstavy) na bílo a po vyhlášení výsledků svůj výtvor rozebrali. Kolik krychlí mělo 6, kolik 5, 4, 3, 2, 1 či žádnou stěnu bílou? (*M. Dillingerová, M. Volfová*)

Možné řešení. Na druhý stupeň je celkem potřeba $4\cdot 4\cdot 3 = 48$ krychlí, na první $4\cdot 4\cdot 4 = 64$ a na třetí $4\cdot 4\cdot 2 = 32$. Žáci tedy celkem použili

$$48 + 64 + 32 = 144$$

krychlí.

Krychlí, které nemají žádnou stěnu bílou, je v první (nejspodnější) vrstvě $10 \cdot 2 = 20$, ve druhé $7 \cdot 2 = 14$, ve třetí $3 \cdot 2 = 6$ a ve čtvrté vrstvě žádná; celkem tedy

$$20 + 14 + 6 = 40.$$

Krychlí, které mají právě jednu stěnu bílou, je v přední/zadní stěně $10 + 7 + 3 = 20$, v bočních stěnách $4+2+2 = 8$ (počítáno zleva doprava) a v horních stěnách $6+4+6 = 16$; celkem tedy

$$20 \cdot 2 + 8 + 16 = 64.$$

Krychlí, které mají právě dvě stěny bílé, je na podélných hranách $2 \cdot (3 + 2 + 3) = 16$, na příčných $4 \cdot 2 = 8$ a na svislých $4 + 2 + 2 = 8$; celkem tedy

$$16 + 8 + 8 = 32.$$

Krychlí, které mají tři stěny bílé, je právě 8 a žádná krychle nemá obarveno více než tři stěny.

Pro kontrolu ještě porovnáme výsledky z obou částí diskuse:

$$144 = 40 + 64 + 32 + 8.$$

Poznámka. Pro jiný systém v řešení podobného problému viz úlohu Z7–I–4.

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Do prodejny vína se v noci vloupal kocour. Vyskočil na polici, na níž byly v dlouhé řadě vyrovnány lahve s vínem — první třetina lahví zkraje stála po 160 Kč, následující třetina lahví stála po 130 Kč a poslední třetina po 100 Kč. Nejprve kocour shodil na zem lahev za 160 Kč, která stála úplně na začátku řady, a pak postupoval dále a shazoval bez vynechání jednu lahev za druhou. Než ho to přestalo bavit, srazil 25 lahví a ty se všechny rozbily. Ráno majitel zalitoval, že kocour nezačal se svým řáděním na druhém okraji police. I kdyby totiž rozbil stejný počet lahví, byla by škoda o 660 Kč menší. Kolik lahví bylo původně na polici? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. V zadání není uvedeno, ve které třetině řady kocour přestal shazovat lahve. Budeme postupně uvažovat o každé třetině jako o té, kde kocour skončil, a vždy dojdeme k závěru, zda mohl skončit právě v ní či nikoli.

Pokud přestal v první třetině řady, škoda by při shazování od opačného konce byla o $25 \cdot 60 = 1\,500$ (Kč) menší, protože rozdíl v ceně nejdražší a nejlevnější lahve vína je 60 Kč. V zadání úlohy je rozdíl škod jiný, a sice 660 Kč. Kocour tedy neskončil v první třetině řady.

Pokud shodil více než jednu třetinu, avšak maximálně dvě třetiny řady, rozbil všechny nejdražší lahve a možná několik středně drahých. Při postupu z opačné strany by zlikvidoval stejný počet středně drahých a místo všech nejdražších všechny nejlevnější. Rozdíl škod tedy odpovídá počtu lahví tvořících třetinu řady vynásobenému 60 Kč. Třetinu řady by tedy tvořilo $660 : 60 = 11$ lahví a lahví celkem by bylo $3 \cdot 11 = 33$. Kocour dle zadání shodil 25 lahví, což je více než dvě třetiny z celkových 33 lahví. Podmínka, kterou uvádíme na začátku tohoto odstavce, není splněna, a kocour tudíž nemohl skončit ve druhé třetině řady.

Pokud shodil více než dvě třetiny lahví, zachovalo se jen několik nejlevnějších. Shazoval-li by od opačného konce, zůstalo by nedotčeno stejně nejdražších lahví. Rozdíl škod odpovídá počtu nedotčených lahví vynásobenému 60 Kč. Nedotčených lahví by tedy muselo být $660 : 60 = 11$ a lahví celkem $11 + 25 = 36$. To by znamenalo, že kocour shodil všech 12 nejdražších lahví ($36 : 3 = 12$), všech 12 středně drahých a jednu nejlevnější. Takové řešení vyhovuje.

Na polici bylo původně 36 lahví.

Z7–I–2

Na tabuli jsou napsaná tři přirozená čísla a, b, c, pro která platí:

- největší společný dělitel čísel a, b je 15,
- největší společný dělitel čísel b, c je 6,
- součin čísel b, c je $1\,800$,
- nejmenší společný násobek čísel a, b je $3\,150$.

Která to jsou čísla? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Do tabulky budeme postupně zapisovat jednotlivé prvočíselné činitele rozkladů čísel a, b, c.

Podle první podmínky je největší společný dělitel čísel a a b roven $15 = 3 \cdot 5$. To znamená, že jak v řádku a, tak v řádku b musí být činitelé 3 a 5 a žádný další činitel nemůže být v obou řádcích zároveň. Po uplatnění první a jí podobné druhé podmínky vypadá tabulka takto:

a	$3 \cdot 5 \ldots$
b	$2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots$
c	$2 \cdot 3 \ldots$

Podle třetí podmínky platí $b \cdot c = 1\,800 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. To znamená, že v řádcích b a c musí být těchto 7 činitelů a žádný navíc. Podle čtvrté podmínky je nejmenší společný násobek čísel a a b roven $3\,150 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$. Pro řádky a a b to znamená, že:

- v jednom z nich musí být právě jednou činitel 2 a ve druhém maximálně jednou (totéž platí i pro činitel 7),
- v jednom z nich musí být právě dvakrát činitel 3 a ve druhém maximálně dvakrát (totéž platí i pro činitel 5),
- žádný jiný činitel tam být nemůže.

Podle třetí podmínky musíme do řádků b a c doplnit už jen dva činitele: 5 a 2. Činitel 5 nemůže být v řádku c, protože pak by čísla b a c měla společný dělitel $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, což odporuje druhé podmínce. Činitel 2 nemůže být v řádku b, protože to by odporovalo čtvrté podmínce o nejmenším společném násobku čísel a a b. Po této úvaze máme řádky b a c zcela zaplněny:

a	$3 \cdot 5 \ldots$
b	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
c	$2 \cdot 2 \cdot 3$

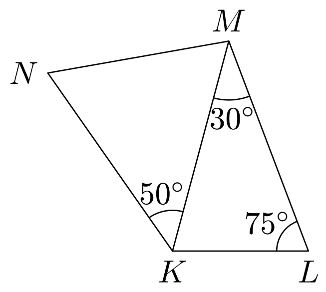
Podle čtvrté podmínky mohou být v řádku a pouze činitelé 2, 3, 5, 7. Činitele 2 a 5 tam nemůžeme doplnit, vznikl by totiž společný dělitel čísel a a b odporující první podmínce. Činitele 3 a 7 do řádku a doplnit musíme kvůli čtvrté podmínce:

a	$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 315$
b	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$
c	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Neznámé a, b, c jsou po řadě rovny číslům 315, 150, 12.

Z7–I–3

Ve čtyřúhelníku $KLMN$ známe vyznačené úhly a víme, že platí $|KN| = |LM|$. Jaká je velikost úhlu KNM?



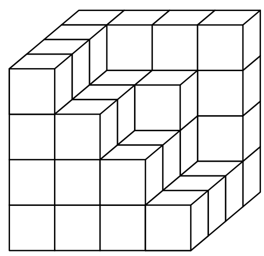
(*L. Hozová*)

Možné řešení. Protože součet vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku je 180°, velikost úhlu LKM je $180° - 75° - 30° = 75°$. Odtud plyne, že trojúhelník KLM je rovnoramenný, tj. $|LM| = |KM|$. Podle zadání je $|LM| = |KN|$, tudíž $|KM| = |KN|$ a trojúhelník KMN je také rovnoramenný. Velikost úhlu KNM je tedy rovna

$$(180° - 50°) : 2 = 65°.$$

Z7–I–4

Krychle byla složena z 64 krychliček o hraně 2 cm. Pak bylo několik krychliček z viditelné strany odebráno, viz obrázek.



1. Jaký je objem a jaký povrch získaného tělesa?
2. Těleso bylo po celém povrchu natřeno červeně, pak rozebráno na původní krychličky. Kolik z nich mělo 6, kolik 5, 4, 3, 2, 1 či žádnou stěnu červenou?

(*M. Volfová*)

Možné řešení. 1. Povrch tělesa je stejný jako povrch původní krychle, tj.

$$6 \cdot 8 \cdot 8 = 384 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Z původní krychle bylo odebráno $3 + 5 + 9 = 17$ krychliček (počítáno po vrstvách zdola) a objem původní krychle byl $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ (cm^3). Objem získaného tělesa je tedy

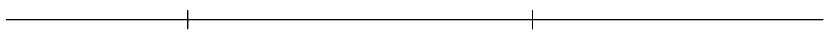
$$512 - 17 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 512 - 136 = 376 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

2. Žádná z krychliček nemá obarveno 5 a více stěn, ostatní případy jsou diskutovány v následující tabulce. V jednotlivých vrstvách (číslováno zdola nahoru) počítáme krychličky, jež mají 4, 3, 2, 1, resp. žádnou stěnu červenou. Odpověď je v posledním řádku, poslední sloupec doplňujeme pro kontrolu:

	4	3	2	1	0	celkem
1. vrstva	1	5	6	4	0	16
2. vrstva	0	2	3	6	2	13
3. vrstva	0	3	3	5	0	11
4. vrstva	2	5	0	0	0	7
celkem	**3**	**15**	**12**	**15**	**2**	47

Z7–I–5

Na číselné ose jsou znázorněna čísla $12x$ a $-4x$. Znázorni na této ose nulu a číslo x.



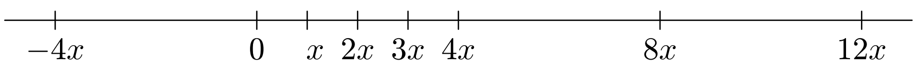
(*M. Petrová*)

Možné řešení. Nejprve je potřeba si uvědomit, kterému bodu odpovídá které číslo. Je zřejmé, že x nemůže být nula (pak by oba body splývaly). Je-li x kladné, potom levý bod znázorňuje číslo $-4x$ a pravý bod číslo $12x$. Je-li ale x záporné, pak je levý bod obrazem čísla $12x$ a pravý bod obrazem čísla $-4x$.

a) x kladné:

Vzdálenost čísel vyznačených na číselné ose je $16x$. Úsečku ohraničenou vyznačenými body rozdělíme na čtvrtiny. Každý ze čtyř úseků pak bude mít délku $4x$. To znamená, že (zleva doprava) postupně dostaneme obrazy čísel $-4x$, 0, $4x$, $8x$, $12x$. Nule tedy odpovídá druhý bod zleva z vyznačených pěti bodů.

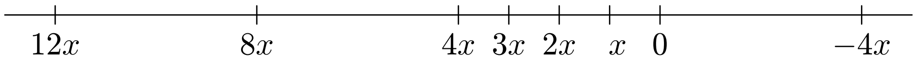
Nyní si budeme všímat úsečky, jejíž krajní body znázorňují čísla 0 a $4x$. Opět ji rozdělíme na čtvrtiny. Dostaneme tak po řadě (zleva doprava) obrazy čísel 0, x, $2x$, $3x$, $4x$. Číslo x je znázorněno druhým bodem zleva z těchto pěti bodů.



b) x záporné:

Postupujeme analogicky — celá situace je vlastně „zrcadlovým obrazem“ té předchozí. Rozdělením zadané úsečky na čtvrtiny dostaneme (zleva doprava) obrazy čísel $12x$, $8x$, $4x$, 0, $-4x$ a nule odpovídá čtvrtý bod zleva z těchto pěti bodů.

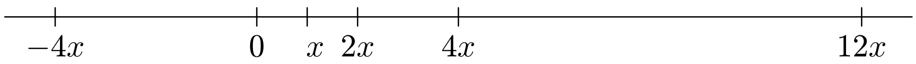
Úsečku, jejímiž krajními body jsou obrazy čísel $4x$ a 0, znovu rozdělíme na čtvrtiny. Dostaneme (zleva doprava) obrazy čísel $4x$, $3x$, $2x$, x, 0. Číslo x je znázorněno čtvrtým bodem zleva z této pětice bodů.



Jiné řešení. Jak nulu, tak číslo x lze nalézt mezi $-4x$ a $12x$ pouze půlením vhodných úseček na číselné ose. Využijeme toho, že aritmetickému průměru dvou čísel odpovídá střed příslušné úsečky:

- aritmetický průměr $-4x$ a $12x$ je $4x$,
- aritmetický průměr $-4x$ a $4x$ je 0,
- aritmetický průměr 0 a $4x$ je $2x$,
- aritmetický průměr 0 a $2x$ je x.

Tento postup znázorníme v případě a) pro x kladné:



Z7–I–6

Doplňte místo hvězdiček číslice tak, aby součet výsledků následujících dvou příkladů byl 5 842:

$$\begin{array}{r} \ast2\ast7\\ 3\ast4\ast\\ \hline 4\ast0\ast \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ast9\ast\\ -\ast254\\ \hline \ast5\ast\ast \end{array}$$

Úloha má více řešení, určete alespoň dvě. (*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Doplňujeme postupně jednotlivé číslice; některé lze doplnit nezávisle na ostatním přímo v prvním příkladě, některé ve druhém, číslice pod čarou doplňujeme podle informace o součtu výsledků obou příkladů. Postupovat můžeme např. následujícím způsobem:

$$\begin{array}{r} \ast2\ast7\\ 3\ast4\ast\\ \hline 4\ast0\ast \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\mathbf{7}9\ast\\ -\ast254\\ \hline \ast5\ast\ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ast2\ast7\\ 3\ast4\ast\\ \hline 4\mathbf{3}0\ast \end{array} \qquad \begin{array}{r} 279\ast\\ -\ast254\\ \hline \ast5\ast\ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \ast2\ast7\\ 3\mathbf{0}4\ast\\ \hline 430\ast \end{array} \qquad \begin{array}{r} 279\ast\\ -\ast254\\ \hline \ast5\ast\ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{1}2\ast7\\ 304\ast\\ \hline 430\ast \end{array} \qquad \begin{array}{r} 279\ast\\ -\ast254\\ \hline \ast5\ast\ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12\ast7\\ 304\ast\\ \hline 430\ast \end{array} \qquad \begin{array}{r} 279\ast\\ -\ast254\\ \hline \mathbf{1}5\ast\ast \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12{*}7\\ 304{*}\\ \hline 430{*}\end{array}\qquad\begin{array}{r} 279{*}\\ -\mathbf{1}254\\ \hline 15{*}{*}\end{array}$$

Zde již nelze doplnit žádnou číslici jednoznačně. Na místě jednotek v kterémkoli zatím neznámém čísle může být číslice od 0 do 9 a libovolná volba na jednom takovém místě stačí k doplnění všech zbývajících číslic. Úloha tedy má nejvýše deset řešení, které již snadno odhalíme. Např. po doplnění 0 do výsledku prvního příkladu můžeme pokračovat takto:

$$\begin{array}{r} 12{*}7\\ 304\mathbf{3}\\ \hline 4300\end{array}\qquad\begin{array}{r} 279{*}\\ -1254\\ \hline 15{*}{*}\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12\mathbf{5}7\\ 304\mathbf{3}\\ \hline 4300\end{array}\qquad\begin{array}{r} 279{*}\\ -1254\\ \hline 15{*}{*}\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3043\\ \hline 4300\end{array}\qquad\begin{array}{r} 279{*}\\ -1254\\ \hline 15{*}\mathbf{2}\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3043\\ \hline 4300\end{array}\qquad\begin{array}{r} 279\mathbf{6}\\ -1254\\ \hline 15{*}2\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3043\\ \hline 4300\end{array}\qquad\begin{array}{r} 2796\\ -1254\\ \hline 15\mathbf{4}2\end{array}$$

Kontrola ($4\,300+1\,542=5\,842$) nás ujistí, že jsme právě našli jedno z možných řešení. Tímto způsobem lze najít všechna řešení, kterých je právě sedm:

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3043\\ \hline 4300\end{array}\qquad\begin{array}{r} 2796\\ -1254\\ \hline 1542\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3044\\ \hline 4301\end{array}\qquad\begin{array}{r} 2795\\ -1254\\ \hline 1541\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3045\\ \hline 4302\end{array}\qquad\begin{array}{r} 2794\\ -1254\\ \hline 1540\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257\\ 3046\\ \hline 4303\end{array}\qquad\begin{array}{r} 2793\\ -1254\\ \hline 1539\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257 \\ 3047 \\ \hline 4304 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2792 \\ -1254 \\ \hline 1538 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257 \\ 3048 \\ \hline 4305 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2791 \\ -1254 \\ \hline 1537 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1257 \\ 3049 \\ \hline 4306 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2790 \\ -1254 \\ \hline 1536 \end{array}$$

Poznámka. Při doplnění např. 7 do výsledku prvního příkladu vede předchozí postup k následujícímu závěru:

$$\begin{array}{r} 1267 \\ 3040 \\ \hline 4307 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2799 \\ -1254 \\ \hline 1545 \end{array}$$

Toto však není řešení dané úlohy, protože $4\,307 + 1\,545 \neq 5\,842$. Ze stejného důvodu nezískáme další řešení ani po doplnění 8 a 9 na místo 7. . .

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Napište číslo 75 jako součet několika po sobě bezprostředně jdoucích přirozených čísel. Najděte aspoň čtyři řešení. (*M. Volfová*)

Možné řešení. Chceme-li vyjádřit 75 požadovaným způsobem pomocí dvou sčítanců, hledáme přirozené číslo x tak, aby $75 = x + (x + 1) = 2x + 1$. Jediné takové číslo je $x = 37$, tudíž

$$75 = 37 + 38.$$

Podobně pro tři sčítance, hledáme přirozené řešení rovnice $75 = x+(x+1)+(x + 2) = 3x + 3$, jež je $x = 24$, tudíž

$$75 = 24 + 25 + 26.$$

Pomocí čtyř (podobně osmi, dvanácti, ...) sčítanců 75 takto vyjádřit nelze, neboť součet jakýchkoli čtyř (podobně osmi, dvanácti, ...) po sobě bezprostředně jdoucích přirozených čísel je vždy sudý.

Pět sčítanců odpovídá řešení rovnice $75 = x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4) = 5x+10$, jež je $x = 13$, tudíž

$$75 = 13 + 14 + 15 + 16 + 17.$$

Obdobným způsobem lze najít ještě následující řešení pomocí šesti, resp. desíti sčítanců:

$$75 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15,$$
$$75 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12.$$

Poznámka. Alternativní zápis pro tři sčítance může vypadat následovně: $75 = (y - 1) + y+(y+1) = 3y$, odtud $y = 25$, což souhlasí s předchozím závěrem. Tento způsob zápisu je výhodný zejména pro liché počty sčítanců; např. 75 nelze zapsat požadovaným způsobem pomocí sedmi, resp. devíti sčítanců, protože 75 není dělitelné 7, resp. 9...

Z8–I–2

Tři kamarádky se sešly na chalupě a vyrazily na houby. Našly celkem 55 hřibů. Po návratu si udělaly smaženici, rozdělily ji na čtyři stejné porce a pozvaly na ni kamaráda Pepu. Líba dala na smaženici šest ze svých hřibů, Maruška osm a Šárka pět. Každé pak zbyl stejný počet hřibů. Pepa jim daroval bonboniéru, kde bylo 38 bonbonů, a řekl, že se mají spravedlivě rozdělit podle toho, jak přispěly na jeho jídlo.

1. Kolik hřibů našla každá?
2. Jak se měly podle Pepy podělit?

(*M. Volfová*)

Možné řešení. 1. Do smaženice kamarádky daly celkem $6 + 8 + 5 = 19$ hřibů, takže jim zůstalo $55 - 19 = 36$. Všechny pak měly stejně, každé tedy zbylo $36 : 3 = 12$ hřibů. Líba dala do smaženice 6 hřibů, našla tedy $12 + 6 = 18$ hřibů, Maruška dala 8, našla proto $12 + 8 = 20$ a Šárka dala 5, našla jich $12 + 5 = 17$.

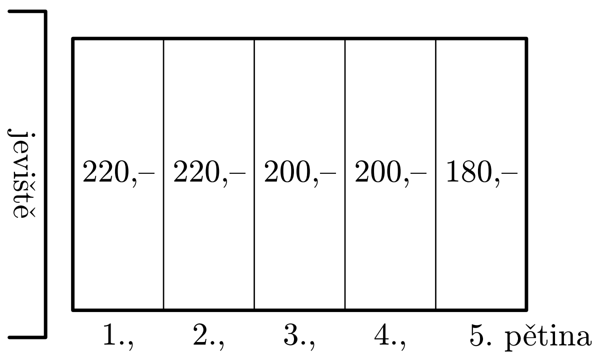
2. Každý snědl čtvrtinu smaženice, tzn. každý snědl $\frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$ hřibů. Líba dala do smaženice 6 hřibů (sama snědla $4\frac{3}{4}$), do Pepovy porce tedy přispěla množstvím $6 - 4\frac{3}{4} = 1\frac{1}{4}$, tj. $\frac{5}{4}$ hřibů. Maruška dala 8 hřibů, přispěla Pepovi $8 - 4\frac{3}{4} = 3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ hřibů. Šárka dala 5 hřibů, přispěla Pepovi $5 - 4\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ hřibu.

Děvčata se měla podle Pepy podělit v poměru $\frac{5}{4} : \frac{13}{4} : \frac{1}{4}$. To je totéž jako poměr $5 : 13 : 1$ nebo též $10 : 26 : 2$, tedy celkem 38 dílů, což odpovídá právě 38 bonbónům v bonboniéře. Líba měla podle Pepy dostat 10 bonbonů, Maruška 26 a Šárka 2.

Z8–I–3

Sedadla v divadelním sálu jsou rozdělena do tří kategorií podle jejich vzdálenosti od jeviště. „I. místa“ jsou nejblíže jevišti, tvoří dvě pětiny kapacity sálu a prodávají se za 220 Kč. „II. místa“ tvoří další dvě pětiny sálu a prodávají se za 200 Kč. Zbývající „III. místa“ se prodávají za 180 Kč. Před zahájením předprodeje na slavnostní premiéru bylo rozdáno 150 vstupenek zdarma zvaným hostům. Vstupenky byly rozdávány postupně od předních míst sálu dozadu. Všechny ostatní vstupenky pak byly prodány. Kdyby se však volné vstupenky rozdávaly postupně od zadních míst dopředu, byla by tržba o 4 320 Kč větší. Kolik míst bylo v sálu? (*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Pro výpočty je podstatné, v kolikáté pětině sálu končí úsek s volnými vstupenkami (viz obrázek). Řešení úlohy proto rozdělíme do pěti částí a v každé budeme pracovat s jiným předpokladem. Pro počet sedadel v jedné pětině sálu používáme neznámou p.



a) Předpokládáme, že 150 volných vstupenek tvořilo $\frac{1}{5}$ sálu nebo méně. Přesunem volných vstupenek do zadní části sálu by se získalo $150 \cdot 40 = 6\,000$ (Kč), což neodpovídá zadání.

b) Předpokládáme, že úsek s volnými vstupenkami končí v druhé pětině sálu, tedy že $p < 150 \leqq 2p$. Přesunem volných vstupenek z první pětiny do páté by se získalo $40p$ Kč. Ve druhé pětině sálu je $150 - p$ volných vstupenek a jejich přesunem do čtvrté pětiny by se získalo $20 \cdot (150 - p)$ Kč. Vypočítáme p:

$$\begin{aligned} 40p + 20 \cdot (150 - p) &= 4\,320, \\ 20p + 3\,000 &= 4\,320, \\ p &= 66. \end{aligned}$$

Vidíme, že předpokládaná nerovnost $150 \leqq 2p$ neplatí, a proto úsek s volnými vstupenkami nemůže končit ve druhé pětině sálu.

c) Předpokládáme, že úsek s volnými vstupenkami končí ve třetí pětině sálu, tedy že $2p < 150 \leqq 3p$. Přesunem volných vstupenek z první pětiny do páté by se získalo $40p$ Kč, ze druhé pětiny do čtvrté $20p$ Kč. Zbylých $150 - 2p$ volných vstupenek je ve třetí pětině sálu a ty by se přesunuly bez zisku opět do třetí pětiny. Vypočítáme p:

$$\begin{aligned} 40p + 20p + 0 \cdot (150 - 2p) &= 4\,320, \\ 60p &= 4\,320, \\ p &= 72. \end{aligned}$$

Vidíme, že předpokládaná nerovnost $2p < 150 \leqq 3p$ platí. Úsek s volnými vstupenkami tedy mohl končit ve třetí pětině sálu a počet míst v sále by pak byl $5p = 5 \cdot 72 = 360$.

d) Předpokládáme, že úsek s volnými vstupenkami končí ve čtvrté pětině sálu, tedy že $3p < 150 \leqq 4p$. Můžeme sestavit rovnici podobně jako v předchozích odstavcích nebo ukázat jinou úvahu: za vstupenky v páté pětině sálu se utržilo $180p$ Kč, vstupenek ve čtvrté pětině se prodalo $4p - 150$ a utržilo se za ně $200 \cdot (4p - 150)$ Kč. Pokud by se volné vstupenky rozdávaly od zadních řad, prodalo by se $5p - 150$ vstupenek a všechny by byly za 220 Kč. Rozdíl těchto dvou tržeb je 4 320 Kč, docházíme k takovéto rovnici:

$$\begin{aligned} 220 \cdot (5p - 150) - 180p - 200 \cdot (4p - 150) &= 4\,320, \\ 120p - 3\,000 &= 4\,320, \\ p &= 61. \end{aligned}$$

Vidíme, že předpokládaná nerovnost $3p < 150$ neplatí, a proto úsek s volnými vstupenkami nemůže končit ve čtvrté pětině sálu.

e) Předpokládáme, že úsek s volnými vstupenkami končil až v páté pětině sálu. Můžeme postupovat jako v odstavcích b), c) a d) nebo použít jednodušší úvahu: peníze se utržily pouze za místa v páté pětině, prodávala-li by se místo toho v první pětině, získalo by se za každé o 40 Kč více. Prodávaných míst by tedy bylo $4\,320 : 40 = 108$ a všech míst $150 + 108 = 258$. Pak by ale úsek se 150 volnými vstupenkami nekončil v poslední pětině sálu, tedy předpoklad v úvodu této části řešení nemůže být naplněn.

V sále bylo 360 míst.

Z8–I–4

Dostali jsme krychli, která měla délku hrany vyjádřenou v centimetrech celým číslem. Všechny její stěny jsme obarvili na červeno a poté jsme ji rozřezali beze zbytku na krychličky o hraně 1 cm.

- Lukáš tvrdí, že krychliček se dvěma obarvenými stěnami je desetkrát více než těch se třemi obarvenými stěnami.
- Martina říká, že krychliček se dvěma obarvenými stěnami je patnáctkrát více než těch se třemi obarvenými stěnami.

Pravdu má však pouze jeden — kdo? A kolik měřila hrana původní krychle?

(*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Z formulace zadání plyne, že hrana původní krychle měřila aspoň 2 cm.

Krychlička má tři obarvené stěny, pokud její vrchol byl původně vrchol velké krychle. Takových krychliček je proto stejně jako vrcholů krychle, tedy 8.

Krychlička má právě dvě obarvené stěny, pokud jedna její hrana tvořila původně hranu velké krychle a zároveň žádný vrchol krychličky nebyl původně vrchol velké krychle. Protože velká krychle měla 12 hran, je počet krychliček právě se dvěma obarvenými stěnami násobkem dvanácti. Podle Lukáše je takových krychliček $10 \cdot 8 = 80$, což není možné, protože 80 není násobek dvanácti. Pravdu má Martina, která tvrdí, že takových krychliček je $15 \cdot 8 = 120$.

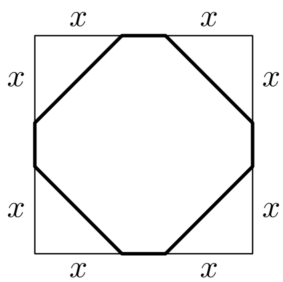
Na každé hraně velké krychle jsme rozřezáním získali $120 : 12 = 10$ krychliček se dvěma obarvenými stěnami. Hranu původní krychle však tvořily i dvě krychličky se třemi obarvenými stěnami, délka hrany tedy odpovídala dvanácti krychličkám. Hrana původní krychle měřila 12 cm.

Z8–I–5

Ze čtverce o straně 6 cm odřízneme od každého vrcholu shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky tak, aby se obsah čtverce zmenšil o 32 %. Jakou velikost mají odvěsny?

(*M. Krejčová*)

Možné řešení. Obsah čtverce o straně 6 cm je 36 cm^2. Odříznuté části mají dohromady obsah $0{,}32 \cdot 36 = 11{,}52\,(\mathrm{cm}^2)$. Pokud odvěsnu odříznutého trojúhelníku označíme x, potom obsah každého takového trojúhelníku je $\frac{1}{2}x^2$.



Dohromady dostáváme rovnici, kterou snadno vyřešíme:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{x^2}{2} &= 11{,}52, \\ x^2 &= 5{,}76, \\ x &= 2{,}4. \end{aligned}$$

Odvěsny odříznutých pravoúhlých trojúhelníků mají délku 2,4 cm.

Z8–I–6

Ve dvou místnostech vzdělávacího centra se konaly přednášky. Průměrný věk osmi lidí přítomných v první místnosti byl 20 let, průměrný věk dvanácti lidí ve druhé místnosti byl 45 let. V průběhu přednášky odešel jeden účastník a tím se průměrný věk všech osob v obou místnostech zvýšil o jeden rok. Kolik let bylo účastníkovi, který odešel?

(*L. Hozová*)

Možné řešení. Podle zadání byl součet věků osmi osob přítomných v první místnosti roven $8 \cdot 20 = 160$ let, součet věků dvanácti osob přítomných ve druhé místnosti byl

$12 \cdot 45 = 540$ let. Průměrný věk všech osob v obou místnostech tedy byl $\frac{160+540}{8+12} = \frac{700}{20} =$ $= 35$ let.

Pokud x značí věk člověka, který během přednášky odešel, potom víme, že

$$\frac{700 - x}{20 - 1} = 35 + 1,$$

a rovnici dořešíme:

$$\begin{aligned} 700 - x &= 36 \cdot 19, \\ x &= 700 - 684 = 16. \end{aligned}$$

Účastník, který odešel, měl 16 let.

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Dostal jsem zadána dvě přirozená čísla. Poté jsem je obě zaokrouhlil na desítky. Určete, která čísla jsem měl zadána, pokud víte, že:

- podíl zaokrouhlených čísel je stejný jako podíl čísel původních,
- součin zaokrouhlených čísel je o 295 větší než součin původních čísel,
- součet zaokrouhlených čísel je o 6 větší než součet původních čísel.

(*L. Šimůnek*)

Možné řešení. Přirozené číslo zaokrouhlujeme na desítky tak, že k němu přičteme vhodné celé číslo od -4 do 5. Podle třetí podmínky v zadání má být součet dvou zaokrouhlených čísel o 6 větší než součet čísel původních. Obě původní čísla se tedy zaokrouhlováním zvětší a musí o nich platit jeden z následujících předpokladů:

a) Jedno končí číslicí 5, druhé číslicí 9. (Označíme-li je p, q, po zaokrouhlení na desítky dostaneme $p+5$, $q+1$.)
b) Jedno končí číslicí 6, druhé číslicí 8. (Označíme-li je r, s, po zaokrouhlení na desítky dostaneme $r+4$, $s+2$.)
c) Jedno končí číslicí 7, druhé číslicí 7. (Označíme-li je t, u, po zaokrouhlení na desítky dostaneme $t+3$, $u+3$.)

Podle druhé podmínky v zadání je součin zaokrouhlených čísel o 295 větší než součin původních čísel. Protože součin zaokrouhlených čísel musí mít na místě jednotek číslici 0, vyplývá z této podmínky, že součin původních čísel končí číslicí 5. Součin čísel podle předpokladu a) skutečně končí číslicí 5, protože $5\cdot 9 = 45$. Avšak součin čísel podle předpokladu b) končí číslicí 8, protože $6\cdot 8 = 48$, a součin čísel podle předpokladu c) končí číslicí 9, protože $7\cdot 7 = 49$. Dále tedy budeme pracovat pouze s předpokladem a), protože jedině ten může vést ke správnému výsledku. Podle první a druhé podmínky v zadání docházíme k soustavě dvou rovnic:

$$\frac{p+5}{q+1} = \frac{p}{q},$$
$$(p+5)(q+1) = pq + 295.$$

Úpravami první rovnice získáme vztah $p = 5q$. S jeho využitím vyřešíme druhou rovnici:

$$\begin{aligned} pq + p + 5q + 5 &= pq + 295,\\ p + 5q &= 290,\\ 5q + 5q &= 290,\\ q &= 29. \end{aligned}$$

Po dosazení:

$$p = 5\cdot 29 = 145.$$

Výsledná čísla p a q mají na místě jednotek takové číslice, jaké jsme určili v našem předpokladu. Úloha má jediné řešení: hledaná čísla jsou 29 a 145.

Jiné řešení. Stejným postupem dojdeme ke stanovení předpokladů a), b), c). Poté, místo diskuse o číslici na místě jednotek v součinu původních čísel, sestavíme zvlášť pro každý předpoklad rovnici podle druhé podmínky v zadání:

a) $(p+5)(q+1) = pq + 295$, po úpravě $p + 5q + 5 = 295$,
b) $(r+4)(s+2) = rs + 295$, po úpravě $2r + 4s + 8 = 295$,
c) $(t+3)(u+3) = tu + 295$, po úpravě $3t + 3u + 9 = 295$.

Vidíme, že upravená rovnice b) nemůže mít v oboru celých čísel řešení; dosazením jakýchkoli celých čísel totiž získáme na levé straně sudý součet, což odporuje číslu 295 napravo. Podobně ani upravená rovnice c) nemůže mít v oboru celých čísel řešení, protože dosazením jakýchkoli celých čísel na levou stranu rovnice získáme součet dělitelný třemi, což odporuje číslu 295 napravo. Pouze rovnice a) může mít řešení v oboru celých čísel a k němu dojdeme za použití vztahu $p = 5q$ tak, jak bylo uvedeno výše.

Ještě jiné řešení. Stejně jako v předchozích řešeních nejprve dojdeme k závěru, že jedno původní číslo má na místě jednotek číslici 9, druhé číslici 5. První tedy můžeme zapsat jako $10a + 9$, po zaokrouhlení na desítky dostaneme $10a + 9 + 1$, tj. $10(a + 1)$. Druhé zapíšeme jako $10b+5$, po zaokrouhlení na desítky dostaneme $10b+5+5$, tj. $10(b+1)$. Čísla a, b jsou čísla přirozená nebo nula (v zadání není řečeno, že žádné číslo nemůže být jednomístné). Podle druhé podmínky v zadání platí:

$$\begin{aligned} 10(a+1) \cdot 10(b+1) &= (10a+9) \cdot (10b+5) + 295, \\ 100ab + 100a + 100b + 100 &= 100ab + 90b + 50a + 45 + 295, \\ 50a + 10b &= 240, \\ 5a + b &= 24. \end{aligned}$$

Všechna možná řešení vypíšeme do tabulky:

a	0	1	2	3	4
b	24	19	14	9	4

Odpovídající dvojice čísel jsou

$10a+9$	9	19	29	39	49
$10b+5$	245	195	145	95	45

U každé z těchto dvojic ověříme, zda je splněna první podmínka:

- $\frac{9}{245} \neq \frac{10}{250}$, tedy dvojice 9 a 245 není řešením,
- $\frac{19}{195} \neq \frac{20}{200}$, tedy dvojice 19 a 195 není řešením,
- $\frac{29}{145} = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}$, tedy dvojice 29 a 145 je řešením,
- $\frac{39}{95} \neq \frac{40}{100}$, tedy dvojice 39 a 95 není řešením,
- $\frac{49}{45} \neq \frac{50}{50}$, tedy dvojice 49 a 45 není řešením.

Všem uvedeným podmínkám vyhovuje pouze dvojice 29 a 145.

Z9–I–2

Pat a Mat byli na výletě. Vyšli ráno po osmé hodině, kdy velká a malá ručička na Patových hodinkách ležely v opačných polopřímkách. V opačných polopřímkách byly ručičky Patových hodinek, i když se oba přátelé před polednem vrátili. Mat dobu výletu měřil na stopkách. Určete i vy s přesností na sekundy, jak dlouho trvala cesta. Předpokládejte, že Patovy hodinky a Matovy stopky šly přesně. (*M. Volfová*)

Možné řešení. Rychlost malé ručičky je 30° za 60 min, tj. 0,5° za 1 min. Rychlost velké ručičky je 360° za 60 min, tj. 6° za 1 min. Polohu ručičky na ciferníku, která ukazuje na číslo 12, nazvěme jako „základní polohu“. V 8:00 je velká ručička v základní poloze, malá ručička v 8:00 ukazuje na číslo 8, tedy od základní polohy je pootočena o 240°. Dobu, která uplynula od 8:00 do okamžiku, kdy ručičky ležely v opačným polopřímkách a začal výlet, označíme jako x min. V hledaný okamžik je velká ručička od základní polohy pootočena o $(0+6x)^\circ$, malá ručička o $(240+0{,}5x)^\circ$. Ručičky v ten moment leží v opačným polopřímkách, a tak pootočení malé ručičky od základní polohy je o 180° větší než pootočení velké ručičky. Docházíme k rovnici, jejímž vyřešením zjistíme x:

$$\begin{aligned}(0+6x)+180&=240+0{,}5x,\\5{,}5x&=60,\\x&=10{,}\overline{90}.\end{aligned}$$

Hodnota $10{,}\overline{90}$ min je přibližně 10 min 54,5 s; výlet tedy začal v 8 h 10 min 54,5 s.

Podobně sestavíme rovnici, kde y vyjadřuje dobu v minutách, která uplynula od 11:00 do okamžiku, kdy výlet skončil:

$$\begin{aligned}(0+6y)+180&=330+0{,}5y,\\5{,}5y&=150,\\y&=27{,}\overline{27}.\end{aligned}$$

Hodnota $27{,}\overline{27}$ min je přibližně 27 min 16,4 s; výlet tedy skončil v 11 h 27 min 16,4 s.

Po odečtení dvou nalezených časů dojdeme k závěru, že výlet trval 3 h 16 min 22 s.

Poznámka. Pokud všechny časové údaje vyjadřujeme od začátku v hodinách, předchozí rovnice pro neznámou x vypadá takto:

$$(0+360x)+180=240+30x,$$

a jejím řešením je $x=\frac{2}{11}$ (h). Podobně neznámá y vychází $\frac{5}{11}$ (h) a celý výlet trval

$$\left(11+\frac{5}{11}\right)-\left(8+\frac{2}{11}\right)=3+\frac{3}{11}\text{ (h)},$$

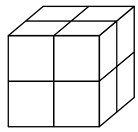
tj. přibližně 3 h 16 min 22 s.

Jiné řešení. Během půldne, tedy v době od 0:00 do 12:00, leží ručičky v opačných polopřímkách celkem jedenáctkrát. Časové intervaly mezi takovými okamžiky jsou vždy stejné (obě ručičky se pohybují konstantní rychlostí). Odtud plyne, že délka každého intervalu je $\frac{12}{11}$ h. Doba výletu odpovídá třem zmíněným intervalům; ke správnému výsledku lze tedy dojít i tímto výpočtem:

$$3\cdot\frac{12}{11}=\frac{36}{11}=3+\frac{3}{11}\text{ (h)}.$$

Z9–I–3

Na obrázku je krychle o hraně 2 cm tvořená osmi krychličkami s hranou 1 cm. Osm stěn krychliček je obarveno černě, ostatní jsou bílé. Přitom z nich lze složit krychli, jejíž povrch je bílý. Kolika způsoby mohou být krychličky obarveny? Předpokládejte, že stejně obarvené krychličky nedokážeme odlišit, mohou se tedy zaměnit.



(*K. Pazourek*)

Možné řešení. Ze zadání vyplývá, že každá z osmi krychliček, ze kterých je složena velká krychle, má určitě tři bílé stěny, které navíc mají společný vrchol. Zbylé stěny každé z krychliček jsou buď černé, nebo bílé. Celkem osm stěn má být černých, přitom nezáleží, jak krychličky uspořádáme, důležité je jen, kolik stěn mají obarvených. Navíc nezáleží, jestli například obarvíme první a druhou stěnu, nebo první a třetí stěnu — krychličku pootočením převedeme z jednoho případu na druhý a obráceně. Vypišme si možná obarvení krychliček. V řádcích jsou zaznamenány počty černých stěn na jednotlivých krychličkách, vždy od největšího počtu k nejmenšímu:

- 3, 3, 2, 0, 0, 0, 0, 0,
- 3, 3, 1, 1, 0, 0, 0, 0,
- 3, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0,
- 3, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 0,
- 3, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0,
- 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0,
- 2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 0,
- 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0,
- 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0,
- 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

Dostáváme tak celkem 10 různých obarvení krychliček.

Z9–I–4

Adam a Eva dostali košík, ve kterém bylo 31 jablek. První den snědla Eva tři čtvrtiny toho, co snědl Adam. Druhý den snědla Eva dvě třetiny toho, co snědl týž den Adam. Druhého dne večer byl košík prázdný. Kolik jablek snědla z košíku Eva? (Adam i Eva jablka jedí celá a nedělí se o ně.) (*L. Hozová*)

Možné řešení. Podle zadání snědla Eva první den tři čtvrtiny toho, co snědl Adam. Proto počet jablek, které první den snědl Adam, musí být násobkem čtyř. Označíme jej $4a$, kde a je neznámé přirozené číslo. Počet jablek, které první den snědla Eva, je pak $3a$. Počty jablek snědených za druhý den označíme obdobně: Adam snědl $3b$ a Eva $2b$ jablek, kde b je neznámé přirozené číslo. Sestavíme rovnici o dvou neznámých a budeme pro ni hledat řešení v oboru přirozených čísel:

$$4a + 3a + 3b + 2b = 31,$$

po úpravě

$$7a + 5b = 31.$$

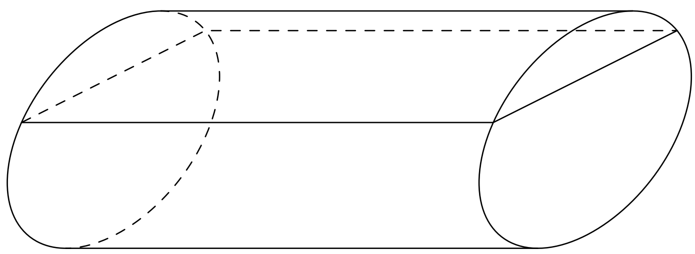
Za a postupně dosazujeme přirozená čísla 1 až 4 a pokaždé určujeme, zda i b vychází jako přirozené číslo. (Dosazovat za a větší čísla nezkoušíme, protože b by vycházelo záporné.) Takto najdeme jediné řešení rovnice v oboru přirozených čísel:

$$a = 3,\ b = 2.$$

První den Eva snědla $3a = 3 \cdot 3 = 9$ jablek, druhý den $2b = 2 \cdot 2 = 4$ jablka. Celkem snědla 13 jablek.

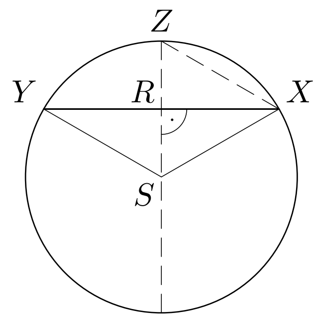
Z9–I–5

Řidič převáží mléko v cisterně tvaru válce. Průměr podstavy je 180 cm, délka cisterny je 4 m. Kolik hl mléka je v cisterně, jestliže je naplněna do tří čtvrtin průměru?



(*M. Krejčová*)

Možné řešení. Část podstavy, která je pod hladinou mléka v cisterně, rozdělíme na nekonvexní kruhovou výseč a rovnoramenný trojúhelník XYS.



Velikost úsečky SX, stejně jako SZ, je rovna poloměru podstavy, tj. $|SX| = |SZ| = r = 90$ cm. Podle zadání je bod R ve středu úsečky SZ, tj. $|SR| = |RZ| = \frac{1}{2}r$. Odtud plyne, že (pravoúhlé) trojúhelníky SXR a ZXR jsou shodné, tudíž $|ZX| = |SX|$ a trojúhelník SXZ je rovnostranný. Proto je velikost vnitřního úhlu RSX rovna 60°, velikost vnitřního úhlu XSY je 120° a velikost vnějšího úhlu XSY je 240°. Nekonvexní kruhové výseči tedy náleží $\frac{2}{3}$ obsahu celého kruhu, tj.

$$S_v = \frac{2}{3}\pi r^2 \doteq 16\,965\ \mathrm{cm}^2 \doteq 170\ \mathrm{dm}^2.$$

Obsah trojúhelníku XYS je roven $S_t = |RX| \cdot |RS|$. Velikost úsečky RS je rovna $\frac{1}{2}r$ a velikost $|RX|$ vyjádříme pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku SXR: $|RX|^2 = |SX|^2 - |RS|^2 = r^2 - (\frac{1}{2}r)^2 = \frac{3}{4}r^2$, tedy $|RX| = \frac{\sqrt{3}}{2}r$. Po dosazení dostáváme

$$S_t = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 \doteq 3\,507\,\mathrm{cm}^2 \doteq 35\,\mathrm{dm}^2.$$

Část podstavy, která je pod hladinou mléka v cisterně, má tedy obsah

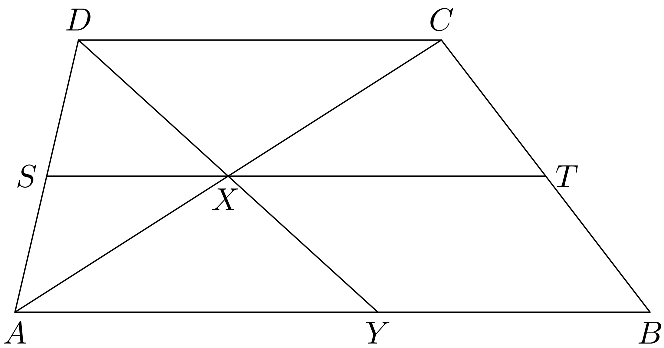
$$S = S_v + S_t \doteq 205\,\mathrm{dm}^2.$$

Cisterna je dlouhá $d = 4\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{dm}$, objem převáženého mléka je tedy přibližně roven

$$V = S \cdot d \doteq 8\,200\,\mathrm{dm}^3 = 82\,\mathrm{hl}.$$

Z9–I–6

V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD délky 7 cm a 4 cm jsou body S a T středy stran AD a BC, viz obrázek. Bod X je průsečík úseček AC a ST, bod Y je průsečík úsečky AB a přímky DX. Obsah čtyřúhelníku $AYCD$ je 12 cm^2. Vypočtěte obsah lichoběžníku $ABCD$.



(*M. Dillingerová*)

Možné řešení. Úsečka ST spojuje středy ramen lichoběžníku $ABCD$, proto musí být rovnoběžná s jeho základnou CD. Úsečka SX, která leží na úsečce ST, je tedy rovnoběžná se stranou CD trojúhelníku CDA. Dále víme, že její krajní bod S je střed strany DA. Úsečka SX je proto střední příčka trojúhelníku CDA. Obdobně lze dokázat, že úsečka SX je střední příčka trojúhelníku AYD. Pro střední příčku trojúhelníku obecně platí, že má dvakrát menší velikost než s ní rovnoběžná strana trojúhelníku. Délka úsečky SX je dvakrát menší než délka strany CD a zároveň je dvakrát menší než délka strany AY. Velikosti úseček CD a AY proto musejí být stejné, obě tedy měří 4 cm. Protože rovnoběžné strany AY a CD čtyřúhelníku $AYCD$ mají stejnou délku, musí jít o kosodélník. Pro výpočet jeho obsahu platí $S_1 = |CD| \cdot v$, kde v je délka jeho výšky ke straně CD. Ze zadání známe S_1 a $|CD|$, délku v spočítáme:

$$v = S_1 : |CD| = 12 : 4 = 3\,(\mathrm{cm}).$$

Tato délka v je také rovna vzdálenosti základen lichoběžníku $ABCD$. Obsah tohoto lichoběžníku je tedy

$$S_2 = \frac{v}{2} \cdot (|AB| + |CD|) = \frac{3}{2}(7+4) = 16{,}5\,(\mathrm{cm}^2).$$

Jiné řešení. Dokážeme, že trojúhelníky AXY a CXD jsou shodné. Jejich úhly AXY a CXD jsou úhly vrcholové a mají tedy stejnou velikost. Rovnoběžky AB a DC jsou proťaty příčkou AC, úhly YAX a DCX zmíněných trojúhelníků jsou tedy úhly střídavé a i ony mají stejnou velikost. Tyto dva trojúhelníky jsou tedy podobné. Navíc výšky těchto trojúhelníků k odpovídajícím si stranám AY a CD mají stejnou délku, neboť obě představují vzdálenost základny lichoběžníku $ABCD$ a jeho střední příčky. Protože se trojúhelníky AXY a CXD shodují ve třech právě zmíněných prvcích, musejí být shodné. Odpovídající si strany AY a CD tedy mají stejnou velikost, a sice 4 cm. Dále je řešení shodné s výše uvedeným.