58. ročník Matematické olympiády

I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Učitelka Kadrnožková kupovala v pokladně zoologické zahrady vstupenky pro své žáky a pro sebe. Vstupenka pro dospělého byla dražší než pro školáka, avšak ne více než dvakrát. Učitelka Kadrnožková zaplatila celkem 994 Kč. Učitel Hnízdo měl s sebou o tři žáky více než jeho kolegyně, a tak za své žáky a za sebe zaplatil 1 120 Kč.

1. Kolik žáků měl s sebou učitel Hnízdo?
2. Kolik stála vstupenka pro dospělého?

Možné řešení. Ze zadání bezprostředně vyplývá, že vstupné pro tři žáky stálo $1120 - 994 = 126$ (Kč), tedy pro jednoho žáka $126 : 3 = 42$ (Kč). Za 1 120 Kč by učitel Hnízdo nakoupil vstupenky pro nejvýše 26 žáků (a 28 Kč by mu pak zbylo), protože $1\,120 : 42 = 26$ (zbytek 28). Když zbytek přidáme k ceně žákovské vstupenky, získáme cenu vstupenky pro dospělého (tato vstupenka má být dražší než žákovská, avšak ne více než dvakrát). Učitelova vstupenka tedy stála $42 + 28 = 70$ (Kč) a žáků bylo $26 - 1 = 25$.

(Pro kontrolu: $25 \cdot 42 + 70 = 1\,120$ a $22 \cdot 42 + 70 = 994$, takže vše je v naprostém pořádku.)

Z5–I–2

František Nudílek se zabýval tím, že psal po sobě jdoucí přirozená čísla. Začal takto: 1234567891011... Po čase ho to přestalo bavit, dokončil právě rozepsané číslo a kriticky se podíval na svůj výtvor. Zjistil, že v posloupnosti číslic, které napsal, se vyskytuje pět jedniček bezprostředně za sebou.

1. Kolik nejméně po sobě jdoucích přirozených čísel musel František napsat?
2. Kolik nejméně číslic musel František napsat?

Možné řešení. 1. Aby bylo v řadě pět jedniček za sebou, musí být napsána čísla větší než 110 a řada vypadá takto:

$$123456789101112\ldots110\underline{11111}2\ldots$$

František napsal nejméně 112 za sebou jdoucích přirozených čísel.

2. Pro počítání číslic si uvědomíme, že v napsané řadě je 9 čísel jednomístných (čísla 1–9), 90 čísel dvojmístných (čísla 10–99) a aspoň 13 čísel trojmístných (čísla 100–112). Dohromady František napsal nejméně $9 + 90 \cdot 2 + 13 \cdot 3 = 228$ číslic.

Z5–I–3

Nejvyšší známá sopka na Zemi je Mauna Kea na Havajských ostrovech. Její výška od úpatí po vrchol je dokonce o 358 metrů větší, než je nadmořská výška nejvyšší hory světa, Mount Everestu. Nezvedá se však z pevniny, ale ze dna Tichého oceánu, z 5 000metrové hloubky. Kdyby mořská hladina v této oblasti klesla o 397 metrů, byla by ponořená část Mauna Key přesně stejně vysoká jako část, která by vyčnívala nad hladinu.

1. Jakou nadmořskou výšku má vrchol sopky?
2. Kolik měří Mauna Kea od úpatí po vrchol?
3. Jakou nadmořskou výšku má Mount Everest?

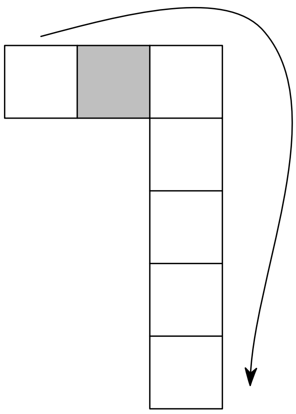
(Údaje o nadmořských výškách uváděné v různých zdrojích se mohou lišit, což je způsobeno nepřesnostmi měření, pohyby zemské kůry, vrstvou sněhové pokrývky apod. Při řešení úlohy proto vycházej pouze z údajů v ní uvedených.)

Možné řešení. 2. Kdyby mořská hladina klesla o 397 m, byla by ponořená část sopky $5\,000 - 397 = 4\,603$ (m). Sopka Mauna Kea tedy měří od úpatí po vrchol $4\,603 + 4\,603 =$ $= 9\,206$ (m).

1. Z toho plyne, že vrchol sopky je v nadmořské výšce $9\,206 - 5\,000 = 4\,206$ (m).

3. A Mount Everest má nadmořskou výšku $9\,206 - 358 = 8\,848$ (m).

Z5–I–4



Klasická hrací kostka se převracela naznačeným směrem po plánu na obrázku. Na každém políčku zůstaly otisknuty tečky ze stěny, kterou se kostka plánu dotýkala. Počet všech teček otisknutých na plánu byl 23.

Kolik teček bylo otisknuto na vybarveném políčku?

(Klasická hrací kostka má na stěnách tečky v počtu od 1 do 6 umístěné tak, že na protilehlých stěnách je vždy dohromady 7 teček. Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

Možné řešení. Dvojice čísel ležících na protilehlých stěnách kostky jsou $(1, 6)$, $(2, 5)$ a $(3, 4)$. Při řešení úlohy je možné diskutovat všechny možnosti vzhledem k umístění kostky na prvním políčku plánu, což je zbytečně pracné. Jednodušší je uvědomit si, na kterých políčkách se otiskují protilehlé stěny. Označme a počet teček na stěně, kterou se kostka dotkne prvního políčka plánu, a b počet teček na stěně, kterou se kostka dotkne následujícího políčka plánu. Pak zjistíme, že na prvních třech políčkách jsou otisknuty následující počty teček:

a	b	$7-a$

Po převalení se na další políčko plánu nemůže dostat žádný z počtů a, $7-a$, b ani $7-b$. Označme tedy další otisknutý počet teček c. Postupně na plánu získáme počty zaznamenané na obrázku:

a	b	$7-a$
		c
		a
		$7-c$
		$7-a$

Můžeme si všimnout, že dvojice a, $7-a$ se na plánu vyskytuje dvakrát a dvojice c, $7-c$ jedenkrát. Součet těchto dvojic je vždy 7 a součet všech otisknutých teček je:

$$a+b+(7-a)+c+a+(7-c)+(7-a)=3\cdot 7+b=21+b.$$

Ve skutečnosti bylo otisknutých 23 teček, tedy $21+b=23$ a $b=2$.

Jiné řešení. Označme počty otisknutých teček na jednotlivých políčkách a až g jako na obrázku:

a	b	c
		d
		e
		f
		g

Na políčkách e a a je otištěna stejná stěna a rovněž na políčkách c a g je otištěna stejná stěna. Protože součet teček na protilehlých stěnách kostky je vždy sedm, platí při převracení kostky podle návodu, že $a+c=7$, $d+f=7$ a $e+g=7$ (podobně taky $c+e=7$, ale tento postřeh potřebovat nebudeme). Podle zadání byl součet všech otisknutých teček na políčkách $a + b + c + d + e + f + g = 23$, takže

$$\begin{aligned}(a + c) + (d + f) + (e + g) + b &= 23,\\ 7 + 7 + 7 + b &= 23,\\ 21 + b &= 23,\\ b &= 2.\end{aligned}$$

Na vybarveném políčku byly otisknuty dvě tečky.

Z5–I–5

Digitální hodiny ukazují hodiny a minuty, jako například 14:37.
Kolik minut denně svítí na těchto hodinách alespoň jedna pětka?

Možné řešení. Na 1. místě pětka svítit nemůže. Budeme nejdřív uvažovat interval prvních 12 hodin:

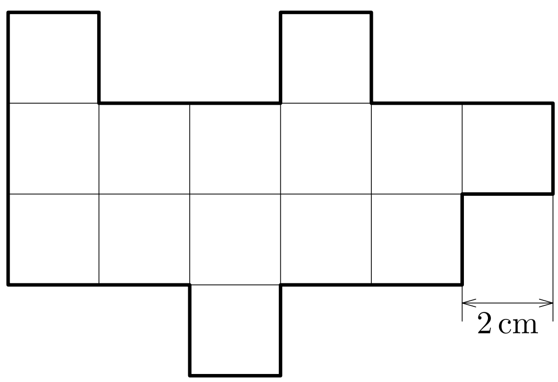
- Na 2. místě pětka svítí 60 minut (od 5:00 do 5:59); u dalších míst proto uvažujeme jen zbylých 11 hodin.
- Na 3. místě svítí pětka každou hodinu 10 minut (od $**$:50 do $**$:59); celkem $11 \cdot 10 = 110$ minut.
- Na 4. místě svítí pětka v každé hodině šestkrát po 1 minutě (05, 15, 25, 35, 45, 55), započteme však pouze 5 minut, neboť minuta $**$:55 je již započtena v předchozím odstavci; celkem $11 \cdot 5 \cdot 1 = 55$ minut.

Aspoň jedna pětka svítí v intervalu 12 hodin $60 + 110 + 55 = 225$ minut, za celý den tedy $2 \cdot 225 = 450$ minut, tj. 7 hodin 30 minut (na druhém místě je i v době od 15:00 do 15:59).

Jiné řešení. V době od 5:00 do 5:59 svítí 60 minut pětka na druhém místě (totéž v době 15:00 až 15:59). Pro každou z ostatních 22 hodin můžeme vypsat, ve kterých minutách bude svítit aspoň jedna pětka: 05, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, tj. celkem 15 minut. Dohromady za celý den to je $2 \cdot 60 + 22 \cdot 15 = 120 + 330 = 450$ minut.

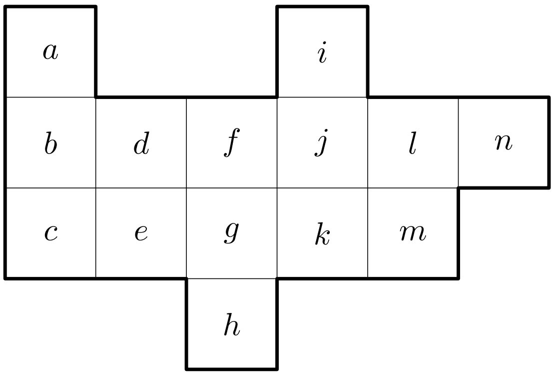
Z5–I–6

Dan si ze čtvercové sítě vystřihl útvar jako na obrázku.



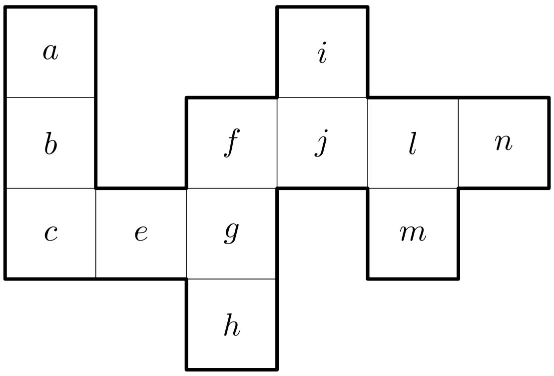
Odstřihni dva čtverečky sítě tak, aby se výsledný útvar nerozpadl a měl co největší obvod. Najdi všechna řešení.

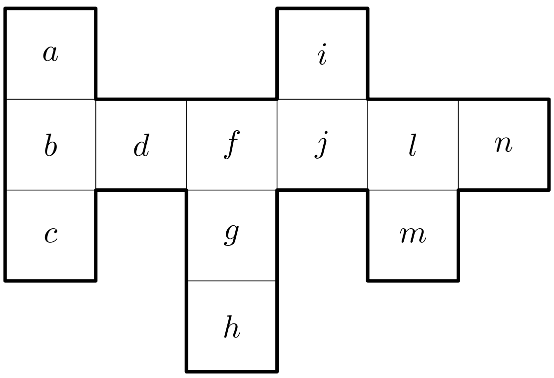
Možné řešení. Označíme jednotlivé čtverečky písmeny a až n:



Aby byl obvod nového útvaru největší možný, soustředíme se pouze na čtverečky, které v původním útvaru sousedí s nejvíce čtverečky. Současně musí po odstřižení každého čtverečku zůstat výsledný útvar pohromadě. Za těchto požadavků mohou být odstřiženy pouze čtverečky d, e, f, k.

Dvojice čtverečků (d, e), (e, f) a (f, k) odstřihnout nemůžeme, protože by se útvar rozpadl. Odstřižením dvojice (d, f) se zvětší obvod útvaru o $2 \cdot 2 = 4\,(\mathrm{cm})$ a odstřižením dvojice (d, k) nebo (e, k) se zvětší o $4 \cdot 2 = 8\,(\mathrm{cm})$. Protože jsme vyčerpali všechny možnosti, poslední dvě varianty představují řešení úlohy, viz obrázky.

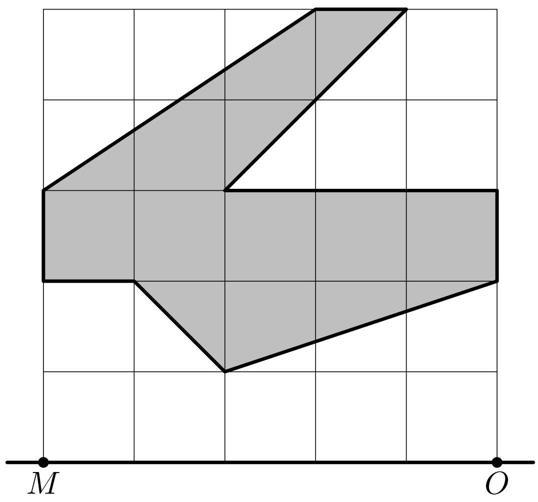




I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Na obrázku je čtvercová síť, jejíž čtverce mají stranu délky 1 cm. V síti je zakreslen obrazec vybarvený šedě. Libor má narýsovat přímku, která je rovnoběžná s přímkou MO a rozděluje šedý obrazec na dvě části o stejném obsahu.



V jaké vzdálenosti od přímky MO povede Libor tuto rovnoběžku?

Možné řešení. Obsah šedé plochy v horních dvou řádcích je

$$4 \cdot 2 - \frac{1}{2}(3 \cdot 2) - \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = 3\,(\mathrm{cm}^2),$$

v prostředním řádku

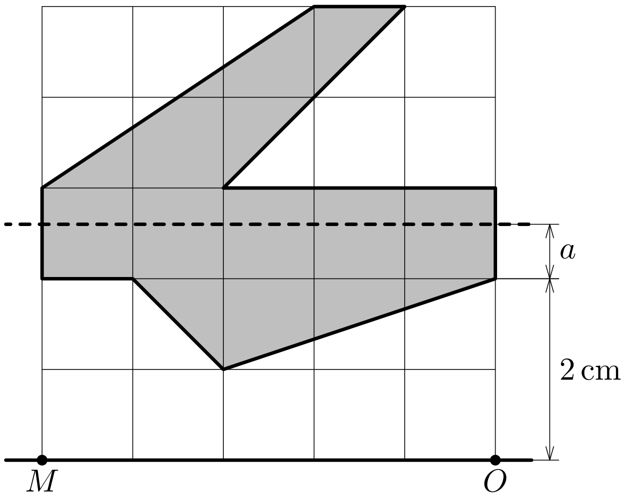
$$5 \cdot 1 = 5\,(\mathrm{cm}^2)$$

a ve druhém řádku odspoda

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(3 \cdot 1) = 2\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsah celého šedě vybarveného obrazce tedy je $3 + 5 + 2 = 10\,(\mathrm{cm}^2)$.

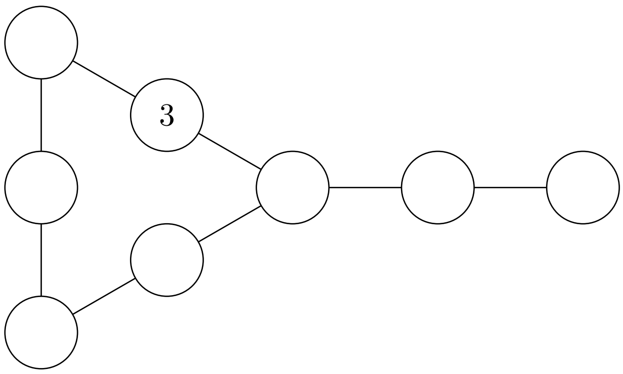
Zmíněná rovnoběžka má celý obrazec rozdělit na dvě části o obsahu $10 : 2 = 5\,(\mathrm{cm}^2)$. Odtud plyne, že tato přímka musí procházet prostředním řádkem tak, aby ho rozdělila na dva obdélníky, z nichž horní bude mít obsah $2\,\mathrm{cm}^2$ a dolní $3\,\mathrm{cm}^2$. Pro obsah dolního obdélníku tedy platí $5 \cdot a = 3$, kde a je kratší strana tohoto obdélníku, viz obrázek.



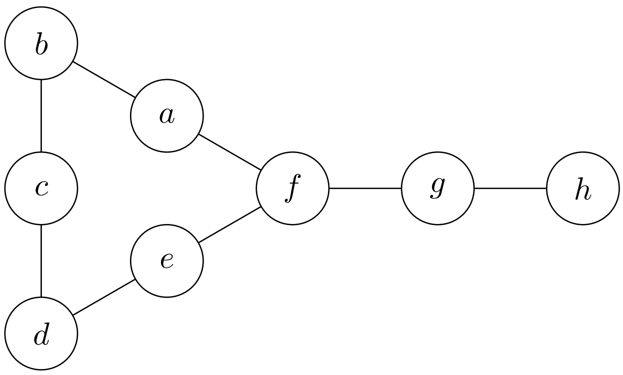
Odtud $a = \frac{3}{5} = 0{,}6\,(\mathrm{cm})$ a Libor povede rovnoběžku ve vzdálenosti $2 + 0{,}6 = 2{,}6\,(\mathrm{cm})$ od přímky MO.

Z6–I–2

Do prázdných polí vepiš čísla 2, 4, 6, 8, 12, 14 a 21 tak, aby tři čísla zapsaná na jedné úsečce dávala vždy stejný součin. Napiš svůj postup.



Možné řešení. Označme jednotlivá pole písmeny a až h jako na obrázku (víme, že $a = 3$):

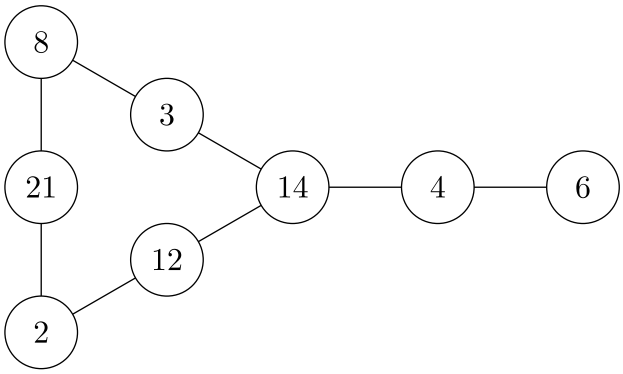


Mezi čísly v zadání jsou jen dva násobky sedmi, totiž 14 a 21. Aby byl násobek sedmi zastoupen na každé úsečce, mohou být čísla 14 a 21 jedině v polích c a f. Umístíme do pole f číslo 14, nebo 21? Pokud bychom se rozhodli pro $f = 21$, byl by součin $b \cdot a \cdot f$ násobkem devíti. Ale v nabídce v zadání by zbyly už pouze dva násobky tří (6 a 12), což by nám nestačilo k tomu, aby i součiny na všech dalších úsečkách byly násobky devíti. Proto je $f = 14$ a $c = 21$.

Protože $b \cdot a \cdot f = b \cdot c \cdot d$, musí platit $a \cdot f = c \cdot d$, a protože v této rovnosti všechna čísla kromě d již známe, snadno dopočítáme $d = 3 \cdot 14 : 21 = 2$.

Na úsečce def neznáme jen číslo e. Protože zde zatím není zastoupen násobek tří, musí to být 6 nebo 12. Protože $d \cdot e \cdot f = f \cdot g \cdot h$, musí platit $d \cdot e = g \cdot h$. Pokud bychom se rozhodli pro $e = 6$, platilo by $d \cdot e = 12$, a tedy i $g \cdot h = 12$. Ze zbylých čísel však do polí g a h neumíme doplnit hodnoty tak, aby jejich součin byl 12. Proto e není 6, ale 12.

Už známe součin $d \cdot e \cdot f$, tedy i součin na každé úsečce. Odtud snadno dopočítáme, že $b = 8$. Zbývající hodnoty g a h jsou buď 4 a 6, nebo opačně. Úloha má tedy dvě velmi podobná řešení, z nichž jedno je na následujícím obrázku:



Z6–I–3

B-banka vydává bankomatové karty se čtyřmístným PIN kódem, který neobsahuje číslici 0. Pan Skleróza se bál, že zapomene PIN kód své karty, proto si ho napsal přímo na ni, avšak římskými číslicemi IIIVIIIXIV, aby to případný zloděj neměl tak jednoduché. Svůj nápad prozradil nejlepšímu příteli, panu Odkoukalovi, který byl také klientem B-banky. Ten záhy se svým PIN kódem udělal totéž a na kartu si napsal IVIIIVI. Ke svému velkému překvapení však z římského zápisu neuměl svůj PIN kód určit přesně.

1. Jaký PIN kód má karta pana Sklerózy?
2. Jaký PIN kód může mít karta pana Odkoukala?

Možné řešení. 1. Jediný způsob, jak rozdělit IIIVIIIXIV na čtyři římské číslice s jednomístným dekadickým zápisem, je III VII IX IV. Pan Skleróza má tedy PIN 3794.

2. Zápis IVIIIVI pana Odkoukala dovoluje různou interpretaci, systematicky vypíšeme všechny možnosti:

- I V III VI, tj. PIN = 1536,
- I VI II VI, tj. PIN = 1626,
- I VII I VI, tj. PIN = 1716,
- I VII IV I, tj. PIN = 1741,

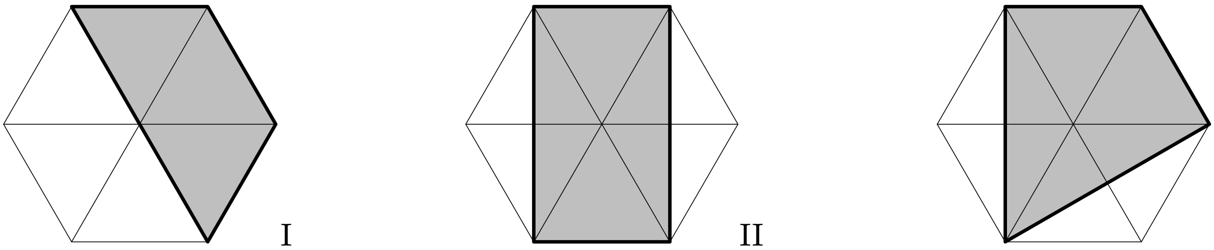
- I VIII V I, tj. PIN = 1851,
- IV I II VI, tj. PIN = 4126,
- IV II I VI, tj. PIN = 4216,
- IV II IV I, tj. PIN = 4241,
- IV III V I, tj. PIN = 4351.

Z6–I–4

Načrtni všechny možné tvarově různé čtyřúhelníky, které mají vrcholy ve vrcholech daného pravidelného šestiúhelníku.

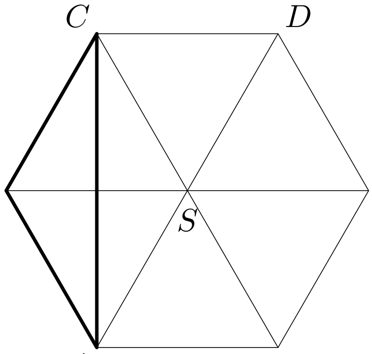
Urči, jaké by byly jejich obsahy, kdyby šestiúhelník měl obsah $156\,\mathrm{cm}^2$.

Možné řešení. Lze získat jen tři tvarově různé čtyřúhelníky I, II, III:



Čtyřúhelník I je polovinou šestiúhelníku, jeho obsah je tedy $78\,\mathrm{cm}^2$.

Čtyřúhelníky II a III získáme, když od šestiúhelníku oddělíme dva shodné trojúhelníky, mají proto stejné obsahy. Nejprve určíme obsahy trojúhelníků, které oddělíme; viz např. trojúhelník ABC:



Pravidelný šestiúhelník lze rozložit na 6 shodných trojúhelníků ($\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$, ...) o stejném obsahu $156 : 6 = 26\,(\mathrm{cm}^2)$. Čtyřúhelník $ABCS$ je složen ze dvou takových trojúhelníků, má tedy obsah $52\,\mathrm{cm}^2$. Stejný čtyřúhelník lze rozdělit na jiné dva shodné trojúhelníky ABC a ACS, které mají též obsahy $26\,\mathrm{cm}^2$. Proto je obsah trojúhelníku ABC roven $26\,\mathrm{cm}^2$.

Obsah čtyřúhelníků II a III je proto $156 - 2 \cdot 26 = 104\,(\mathrm{cm}^2)$.

Z6–I–5

Paní Kučerová byla na sedmidenní dovolené a Káťa jí po celou tuto dobu venčila psa a krmila králíky. Dostala za to velký dort a 700 Kč. Po další dovolené, tentokrát čtyřdenní, dostala Káťa za venčení a krmení podle stejných pravidel stejný dort a 340 Kč.

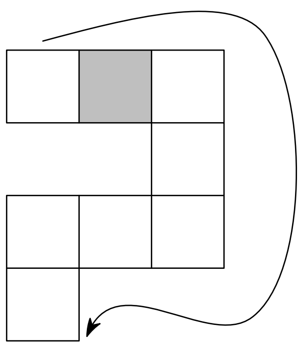
Jakou cenu měl dort?

Možné řešení. Jestliže je d neznámá cena dortu, pak $d + 700$ Kč je sedmidenní odměna pro Káťu. Odměna za jeden den je $\frac{1}{7}d + 100$ Kč, za čtyři dny má být $\frac{4}{7}d + 400$ Kč. Odměna však byla $d + 340$ Kč, tj. o $\frac{3}{7}d$ víc a 60 Kč méně. Tedy $\frac{3}{7}$ dortu odpovídají 60 Kč, $\frac{1}{7}$ dortu 20 Kč, celý dort $7 \cdot 20 = 140$ (Kč).

Jiné řešení. Káťa podruhé pracovala o 3 dny méně a dostala o $700 - 340 = 360$ (Kč) méně (dort měl stejnou cenu). To znamená, že za jeden den si vydělala $360 : 3 = 120$ (Kč). Za 4 dny práce si vydělala $4 \cdot 120 = 480$ (Kč), dostala však jeden dort a 340 Kč. Cena dortu je tedy $480 - 340 = 140$ (Kč).

Z6–I–6

Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné.



Kostku jsme položili na první políčko plánu na obrázku nejmenším číslem dolů. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.

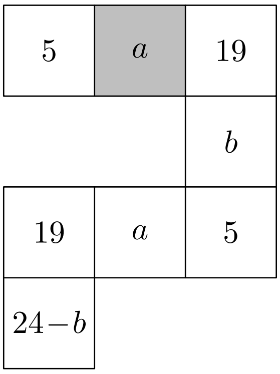
Kterým číslem se kostka dotkla zbarveného políčka, jestliže součet všech napsaných čísel byl nejmenší možný?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

Možné řešení. Prvočísla menší než 20 jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Z nich je potřeba vzít tři dvojice se stejným součtem, což jsou dvojice $(19, 5)$, $(17, 7)$ a $(13, 11)$. Kostka je na plán položena číslem 5, takže na vedlejší políčko se může otisknout jedno z čísel 17, 7, 13 nebo 11. Je možné diskutovat všechny možnosti vzhledem k umístnění zmiňovaných čtyř čísel na kostce, což je zbytečně pracné. Jednodušší je uvědomit si, na kterých políčkách se otiskují protilehlé stěny. Označme a číslo na stěně, kterou se kostka dotkne vybarveného políčka plánu. Pak zjistíme, že na prvních třech políčkách získáme následující čísla:

5	a	19

Označme b číslo na stěně, kterou se kostka dotkne následujícího políčka plánu. Číslo b musí být různé od a, 5, 19, $24 - a$. Nyní můžeme doplnit všechna políčka na plánu:



Můžeme si všimnout, že dvojice 5, 19 se na plánu vyskytuje dvakrát a dvojice b, $24 - b$ jedenkrát. Součet těchto dvojic je vždy 24 a součet všech napsaných čísel je:

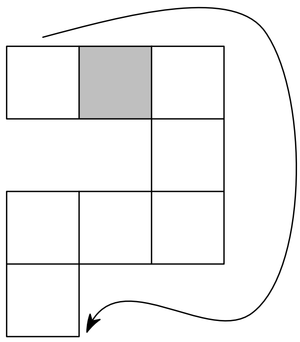
$$5 + a + 19 + b + 5 + a + 19 + (24 - b) = 3 \cdot 24 + 2a = 72 + 2a.$$

Součet tedy závisí jenom na čísle, jímž se kostka dotkne vybarveného políčka plánu. Toto číslo by mělo být nejmenší možné. Protože číslo 5 je již použito, musí jít o číslo 7.

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné.



Kostku jsme položili na první políčko plánu na obrázku největším číslem dolů. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.

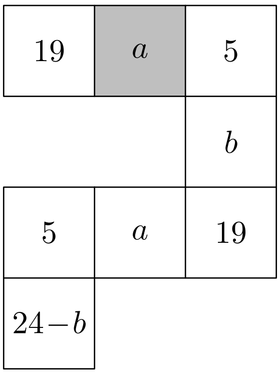
Kterým číslem se kostka dotkla zbarveného políčka, jestliže součet všech napsaných čísel byl největší možný?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

Možné řešení. Prvočísla menší než 20 jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Z nich je potřeba vzít tři dvojice se stejným součtem, což jsou dvojice $(19, 5)$, $(17, 7)$ a $(13, 11)$. Kostka je na plán položena číslem 19, takže na vedlejší políčko se může otisknout jedno z čísel 17, 7, 13 nebo 11. Je možné diskutovat všechny možnosti vzhledem k umístnění zmiňovaných čtyř čísel na kostce, což je zbytečně pracné. Jednodušší je uvědomit si, na kterých políčkách se otiskují protilehlé stěny. Označme a číslo na stěně, kterou se kostka dotkne vybarveného políčka plánu. Pak zjistíme, že na prvních třech políčkách získáme následující čísla:

19	a	5

Označme b číslo na stěně, kterou se kostka dotkne následujícího políčka plánu. Číslo b musí být různé od a, 5, 19, $24 - a$. Nyní můžeme doplnit všechna políčka na plánu:



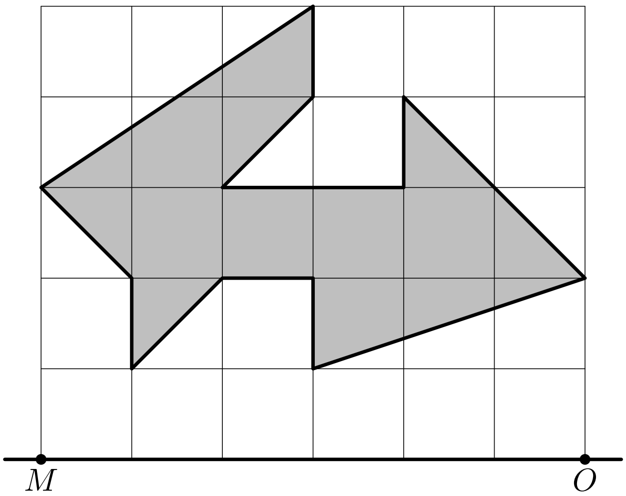
Můžeme si všimnout, že dvojice 19, 5 se na plánu vyskytuje dvakrát a dvojice b, $24-b$ jedenkrát. Součet těchto dvojic je vždy 24 a součet všech napsaných čísel je:

$$19 + a + 5 + b + 19 + a + 5 + (24 - b) = 3 \cdot 24 + 2a = 72 + 2a.$$

Součet tedy závisí jenom na čísle, jímž se kostka dotkne vybarveného políčka plánu. Toto číslo by mělo být největší možné. Protože číslo 19 je již použito, musí jít o číslo 17.

Z7–I–2

Na obrázku je čtvercová síť, jejíž čtverce mají stranu délky 1 cm. V síti je zakreslen obrazec vybarvený šedě. Libor má narýsovat přímku, která je rovnoběžná s přímkou MO a rozděluje šedý obrazec na dvě části o stejném obsahu.



V jaké vzdálenosti od přímky MO povede Libor tuto rovnoběžku?

Možné řešení. Obsah šedé plochy v horních dvou řádcích je

$$\frac{1}{2}(3 \cdot 2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3\,(\mathrm{cm}^2),$$

v prostředním řádku

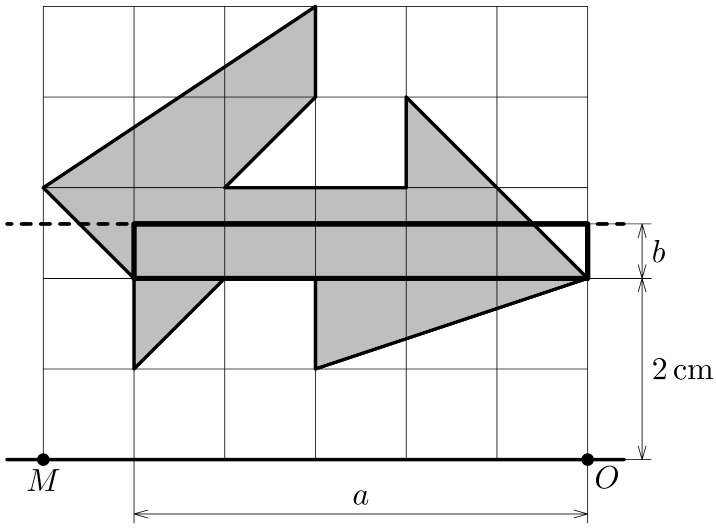
$$4 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5\,(\mathrm{cm}^2)$$

a ve druhém řádku odspoda

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(3 \cdot 1) = 2\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsah celého šedého obrazce tedy je $3 + 5 + 2 = 10\,(\mathrm{cm}^2)$.

Zmíněná rovnoběžka má celý obrazec rozdělit na dvě části o obsahu $10 : 2 = 5\,(\mathrm{cm}^2)$. Šedou plochu v prostředním řádku přitom rozdělí na dva kosodélníky, horní z nich bude mít obsah $2\,\mathrm{cm}^2$, dolní $3\,\mathrm{cm}^2$. Posunutím jedné trojúhelníkové části dolního kosodélníku získáme obdélník o stejném obsahu, jako měl kosodélník, viz obrázek.



Známe obsah S tohoto obdélníku i jeho delší stranu a. Délka jeho kratší strany je $b = S : a = 3 : 5 = 0{,}6\,(\mathrm{cm})$. Libor povede rovnoběžku ve vzdálenosti $2 + 0{,}6 = 2{,}6\,(\mathrm{cm})$ od přímky MO.

Z7–I–3

Turisté plánovali dlouhou túru na tři dny s tím, že každý den ujdou třetinu celé trasy. To dodrželi jen první den. Druhý den ušli pouze třetinu zbylé cesty a třetí den, unaveni, jen čtvrtinu zbytku. Posledních 24 km do cíle je dovezlo terénní auto.

Jak dlouhá měla být celá túra a kolik kilometrů turisté ušli první, druhý a třetí den?

Možné řešení. První den turisté ušli $\frac{1}{3}$ cesty, do cíle jim tak zbyly $\frac{2}{3}$ celkové délky trasy.

Druhý den ušli $\frac{1}{3}$ ze včerejšího zbytku, tj. $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ z celé cesty; do cíle zbyly $\frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$ celé cesty.

Podobně, třetí den ušli $\frac{1}{4}$ ze $\frac{4}{9}$, tj. $\frac{1}{9}$ z celé trasy. Do cíle jim pak chybělo $\frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$ z celkové délky plánované trasy, což bylo podle zadání 24 km. Celá túra byla tedy dlouhá $3 \cdot 24 = 72\,(\mathrm{km})$.

Odtud jednoduše dopočítáme, kolik kilometrů turisté ušli v jednotlivých dnech:

- první den to bylo $\frac{1}{3} \cdot 72 = 24\,(\mathrm{km})$,
- druhý den $\frac{2}{9} \cdot 72 = 16\,(\mathrm{km})$,
- třetí den $\frac{1}{9} \cdot 72 = 8\,(\mathrm{km})$.

Z7–I–4

Pan Horák je o 3 roky starší než jeho žena a jejich prvorozený syn je o 4 roky starší než jejich druhorozený. Všichni čtyři členové rodiny slaví narozeniny ve stejný den, nyní mají dohromady 81 let. Před 5 lety bylo členům této rodiny dohromady 62 let. Urči dnešní stáří rodičů i obou dětí.

Možné řešení. Za 5 let mělo rodině o čtyřech členech přibýt $4 \cdot 5 = 20$ let, ale přibylo jen $81 - 62 = 19$ let. To mohlo nastat jedině v případě, že mladší syn nebyl ještě před 5 lety na světě a do rodinného součtu let přispěl jen 4 lety $(3 \cdot 5 + 4 = 19)$. Mladšímu synovi jsou tedy 4 roky. Jeho staršímu bratrovi je o 4 roky více, tj. 8 let.

Rodičům dohromady je $81 - 4 - 8 = 69$. Je-li matce m let, je otci $m + 3$ let a platí: $m + m + 3 = 69$, tedy $m = 33$.

Matce je 33 let, otci 36 let, staršímu synovi 8 let a mladšímu 4 roky.

Z7–I–5

Zuzka napsala pětimístné číslo. Když připsala jedničku na konec tohoto čísla, dostala číslo, které je třikrát větší než číslo, které by získala, kdyby napsala jedničku před původní číslo.

Které pětimístné číslo Zuzka napsala?

Možné řešení. Pětimístné číslo napsané jako $\overline{ab\,cde}$ představuje hodnotu $10\,000a + {} + 1\,000b + 100c + 10d + e$, kterou označíme x. Když napíšeme jedničku před toto pětimístné číslo, tj. $\overline{1ab\,cde}$, máme číslo o 100 000 větší, tj. číslo $x + 100\,000$. Když napíšeme jedničku za neznámé číslo, tj. $\overline{abc\,de1}$, dostáváme číslo $10x + 1$. Podle zadání platí $10x + 1 = 3 \cdot {} \cdot (x + 100\,000)$, odkud $7x = 299\,999$. Číslo napravo je skutečně dělitelné 7 a Zuzka tudíž napsala $x = 299\,999 : 7 = 42\,857$.

Jiné řešení. Alternativně lze úlohu řešit násobením „odzadu“ podle následujícího návodu:

$$\begin{array}{r} 1abcde \\ \cdot 3 \\ \hline abcde1 \end{array}$$

Počítáme $3 \cdot e = (2)1$, tj. $e = 7$.

$$\begin{array}{r} 1abcd7 \\ \cdot 3 \\ \hline abcd71 \end{array}$$

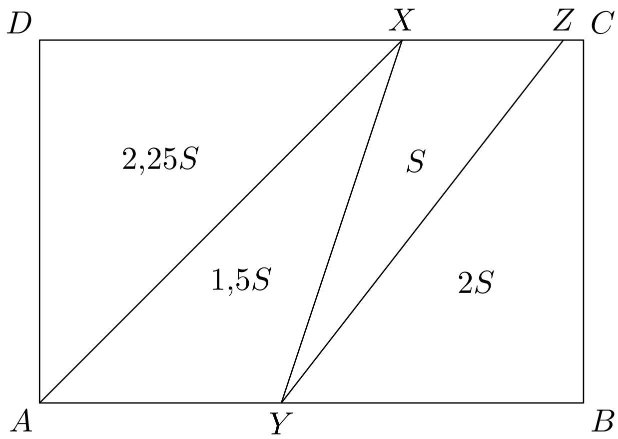
Počítáme $3 \cdot 7 = 21$, 2 si pamatujeme dále, $3 \cdot d + 2 = (1)7$, tj. $d = 5$. Podobným způsobem určíme postupně všechny číslice hledaného čísla.

Z7–I–6

Je dán obdélník $ABCD$. Bodem A vedeme přímku, která protne úsečku CD v bodě X tak, že pro obsahy vzniklých útvarů platí $S_{AXD} : S_{ABCX} = 1 : 2$. Bodem X vedeme přímku, která protne úsečku AB v bodě Y tak, že platí $S_{AXY} : S_{YBCX} = 1 : 2$. Nakonec bodem Y vedeme přímku, která protne úsečku XC v bodě Z tak, že platí $S_{XYZ} : S_{YBCZ} = 1 : 2$.

Vypočítej poměr obsahů $S_{AXD} : S_{AXZY}$.

Možné řešení. Ze zadání platí $S_{XYZ} : S_{YBCZ} = 1 : 2$. Pokud obsah trojúhelníku XYZ označíme S, je obsah čtyřúhelníku $YBCZ$ roven $2S$, viz obrázek.



Dále je zadáno $S_{AXY} : S_{YBCX} = 1 : 2$ a z předchozího plyne, že obsah čtyřúhelníku $YBCX$ je $2S + S = 3S$. Obsah trojúhelníku AXY tedy musí být $3S : 2 = 1{,}5S$. Ze zadání také známe $S_{AXD} : S_{ABCX} = 1 : 2$. Obsah čtyřúhelníku $ABCX$ je $2S + S + 1{,}5S = 4{,}5S$. Obsah trojúhelníku AXD je tedy $4{,}5S : 2 = 2{,}25S$. Hledaný poměr $S_{AXD} : S_{AXZY}$ je $2{,}25S : (1{,}5S + S)$, tj. $2{,}25 : 2{,}5$. Po rozšíření čtyřmi dostaneme poměr $9 : 10$.

Poznámka. Úlohu lze řešit také tak, že se v závislosti na délce úsečky $|AB|$ určí délky $|DX|$, $|AY|$ a $|XZ|$, vyjádří se obsahy požadovaných útvarů a poté jejich poměr: Označíme-li a délku úsečky $|AB|$, pak se z požadavku $S_{AXD} : S_{ABCX} = 1 : 2$ snadno odvodí, že $|DX| = \frac{2}{3}a$. Podobně ze zbylých dvou rovností vyplývá $|AY| = \frac{4}{9}a$ a $|XZ| = \frac{8}{27}a$. Poměr $S_{AXD} : S_{AXZY}$ je potom roven $\frac{|DX|\cdot|BC|}{2} : \frac{(|AY|+|XZ|)\cdot|BC|}{2} = \frac{|DX|}{|AY|+|XZ|}$. Po dosazení a úpravě vychází $9 : 10$.

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Myslím si nezáporné číslo ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem 12. Když je napíši ve tvaru desetinného čísla, bude mít před i za desetinnou čárkou po jedné číslici, obě tyto číslice budou nenulové. Čísel, která mají obě uvedené vlastnosti, je více. Pokud je však seřadím od nejmenšího po největší, bude to „moje“ předposlední.

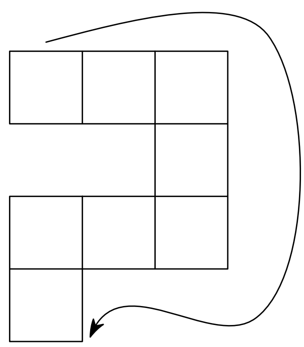
Jaké číslo si myslím?

Možné řešení. Vzhledem k tomu, že jmenovatel je 12, musí být čitatel dělitelný třemi, abychom dostali číslo s ukončeným desetinným rozvojem. Po vykrácení třemi vyjde ve jmenovateli číslo 4. Pak by na desetinných místech byly tyto skupiny: 25, 50, 75 a 00. Zadání vyhovuje pouze skupina 50, proto čitatel musí být lichý násobek šesti. Aby před desetinnou čárkou byla jedna nenulová číslice, musí být čitatel větší než 12 a menší než 120, tj. 18, 30, 42, …, 102, 114. Hledané číslo je tedy $\frac{102}{12} = 8{,}5$.

Jiné řešení. Zlomky se jmenovatelem 12 vyjádříme jako smíšená čísla ve tvaru $a\frac{b}{12}$, kde $1 \leqq a \leqq 9$ a $1 \leqq b \leqq 11$. Zlomky $\frac{b}{12}$ převádíme na desetinná čísla dělením a zkoumáme desetinné rozvoje. Dojdeme ke stejnému výsledku.

Z8–I–2

Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné.



Kostku jsme položili na první políčko plánu na obrázku. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.

Kterým svým číslem se kostka plánu nedotkla, jestliže součet všech napsaných čísel byl 86?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

Možné řešení. Prvočísla menší než 20 jsou 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Z nich je potřeba vzít tři dvojice se stejným součtem, což jsou dvojice $(19, 5)$, $(17, 7)$ a $(13, 11)$. Kostka je na plán položena nějakým číslem, které označíme a. Je možné diskutovat všechny možnosti vzhledem k umístnění všech čísel na kostce, což je zbytečně pracné. Jednodušší je uvědomit si, na kterých políčkách se otiskují protilehlé stěny. Označme b číslo na stěně, kterou se kostka dotkne druhého políčka plánu. Pak zjistíme, že na prvních třech políčkách získáme následující čísla:

a	b	$24-a$

Označme c číslo na stěně, kterou se kostka dotkne následujícího políčka plánu. Číslo c musí být různé od a, b, $24-b$, $24-a$. Nyní můžeme doplnit všechna políčka na plánu:

a	b	$24-a$
		c
$24-a$	b	a
$24-c$		

Můžeme si všimnout, že dvojice a, $24-a$ se na plánu vyskytuje dvakrát a dvojice c, $24-c$ jedenkrát. Součet těchto dvojic je vždy 24 a součet všech napsaných čísel je:

$$a+b+(24-a)+c+a+b+(24-a)+(24-c)=3\cdot 24+2b=72+2b.$$

Z hodnoty součtu zjistíme číslo b: $2b=86-72=14$, tj. $b=7$. Kostka se ani jednou plánu nedotkla stěnou protilehlou ke stěně s číslem 7, nedotkla se tedy číslem 17.

Z8–I–3

Grafik v redakci novin dostal dva obrázky, aby je umístil k článku. První originál byl 13 cm široký a 9 cm vysoký, druhý měřil na šířku 14 cm a na výšku 12 cm. Grafik se rozhodl umístit obrázky na stránku vedle sebe tak, aby se dotýkaly a aby oba měly stejnou výšku. Po vytištění měly obrázky dohromady zaujímat šířku 18,8 cm. Obrázky tedy vhodně zmenšil, aniž by je jakkoli ořezával.

Jaká bude výška vytištěných obrázků?

Možné řešení. Nejprve druhý obrázek zmenšíme, aby měl stejnou výšku jako první, a poté oba zmenšíme/zvětšíme tak, aby dohromady měly danou šířku:

Aby druhý obrázek měl stejnou výšku jako první, musíme jej zmenšit v poměru $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. ířka tohoto zmenšeného obrázku pak bude $\frac{3}{4}\cdot 14=10{,}5\,(\mathrm{cm})$. Nyní první obrázek a zmenšený druhý obrázek, položeny vedle sebe, tvoří obdélník s rozměry $23{,}5\,\mathrm{cm}\times 9\,\mathrm{cm}$. Tento celek zmenšíme tak, aby šířka byla rovna zadaným 18,8 cm. Zmenšíme jej tedy v poměru $\frac{18{,}8}{23{,}5}=\frac{4}{5}$ a výška celku potom bude $\frac{4}{5}\cdot 9=7{,}2\,(\mathrm{cm})$.

Z8–I–4

Máme dány tři navzájem různé nenulové číslice. Na tabuli napíšeme všechna trojciferná čísla, která lze složit z těchto číslic, přičemž pro každé číslo použijeme všechny tři číslice. Součet napsaných čísel je 1 776.

Se kterými třemi číslicemi jsme pracovali? Určete všechna řešení.

Možné řešení. Označme dané číslice a, b, c. Počítání na tabuli pak odpovídá tento součet:

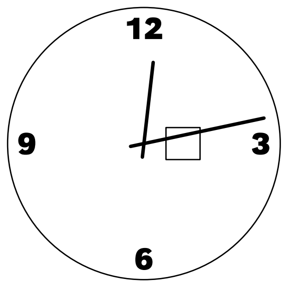
$$\begin{array}{r} abc \\ acb \\ bac \\ bca \\ cab \\ \underline{cba} \\ 1\,776 \end{array}$$

V každém sloupci sčítáme stejnou šestici číslic, a sice $a + a + b + b + c + c$. Z celkového výsledku je zřejmé, že součet těchto šesti číslic je 16, tedy $a + b + c = 8$. Jediné možnosti, jak napsat 8 v tomto tvaru, jsou $8 = 1+1+6 = 1+2+5 = 1+3+4 = 2+2+4 = 2+3+3$. Podmínkám v zadání odpovídají dvě trojice číslic: 1, 2, 5 a 1, 3, 4.

Poznámka. Předchozí výpočet na tabuli můžeme napsat jako $(100a+10b+c)+(100a+10c+b)+(100b+10a+c)+(100b+10c+a)+(100c+10a+b)+(100c+10b+a) = 1776$, tedy $222a + 222b + 222c = 1776$. Po úpravě dostáváme $a + b + c = 8$ a závěr je stejný.

Z8–I–5

Na věži radnice jsou hodiny, které mají blízko středu ciferníku dvířka používaná při údržbě. Dvířka se však otevírají ven, což je nepraktické — například přesně v 12:09 zakryje velká ručička dvířka, která pak nejdou otevřít po dobu, jež končí přesně v 12:21.



Kolik minut denně dvířka nelze otevřít?

(Nezapomeňte, že dvířka může zakrýt i malá ručička; celá dvířka leží v kruhu, který tato ručička opisuje.)

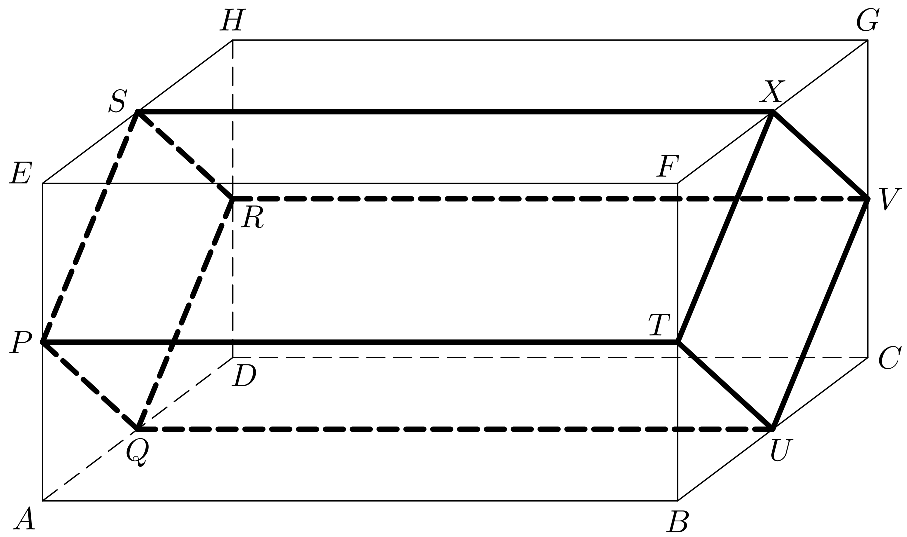
Možné řešení. Každou hodinu jsou dvířka blokována velkou ručičkou od 9. do 21. minuty po celé hodině, tj. 12 minut. Potřebujeme dořešit, kdy přesně zakrývá dvířka malá ručička: 9 minut po celé hodině ukazuje velká ručička tam, kam malá v 1:48, a 21 minut po celé ukazuje velká ručička tam, kam malá ve 4:12. Od 1:48 do 4:12 jsou dvířka zakrytá malou ručičkou a stejně tak ještě po poledni. Počítejme od půlnoci po hodinách, kdy nelze dvířka otevřít:

- 0:09–0:21, tj. 12 minut,
- 1:09–1:21 a 1:48–2:00, tj. 24 minut,
- 2:00–3:00, tj. 60 minut,
- 3:00–4:00, tj. 60 minut,
- 4:00–4:21, tj. 21 minut,
- 5:09–5:21, tj. 12 minut,
- 6:09–6:21, tj. 12 minut,
- atd. až do poledne, tj. ještě $5 \cdot 12$ minut.

Od půlnoci do poledne nelze dvířka otevřít $8 \cdot 12 + 24 + 2 \cdot 60 + 21 = 261$ minut, takže za celý den to je $2 \cdot 261 = 522$ minut.

Z8–I–6

V kvádru $ABCDEFGH$ je umístěno těleso $PQRSTUVX$, jehož vrcholy jsou středy hran kvádru, viz obrázek.



Vypočtěte objem a povrch tělesa, je-li: $|AB| = 8\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 6\,\mathrm{cm}$, $|BF| = 4\,\mathrm{cm}$.

Možné řešení. Čtyřúhelník $PQRS$ v obdélníku $ADEH$ je kosočtverec, jehož obsah je $S_p = \frac{1}{2}|AD| \cdot |AE| = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12\,(\mathrm{cm}^2)$. Těleso $PQRSTUVX$ je hranol s podstavou kosočtverce a výškou $|AB|$, jeho objem je tedy roven $S_p \cdot |AB| = 12 \cdot 8 = 96\,(\mathrm{cm}^3)$.

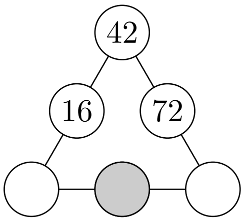
Pro výpočet povrchu potřebujeme znát délku strany kosočtverce. Strana RS je přepona v pravoúhlém trojúhelníku RHS, tedy $|RS| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\,(\mathrm{cm})$. Plášť hranolu $PQRSTUVX$ má obsah $S_{pl} = 4 \cdot |RS| \cdot |AB| = 4 \cdot \sqrt{13} \cdot 8 \doteq 115{,}4\,(\mathrm{cm}^2)$. Povrch hranolu je tedy roven $2 \cdot S_p + S_{pl} \doteq 2 \cdot 12 + 115{,}4 \doteq 139{,}4\,(\mathrm{cm}^2)$.

58. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Do tří prázdných polí na obrázku patří taková přirozená čísla, aby součin tří čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný.



Jaké nejmenší a jaké největší číslo může být za této podmínky vepsáno do šedě vybarveného pole?

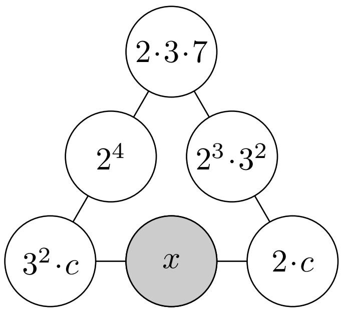
Možné řešení. Zadaná čísla levé strany trojúhelníku dávají součin

$$16 \cdot 42 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$$

a zadaná čísla pravé strany dávají součin

$$42 \cdot 72 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7.$$

Aby součin všech čísel na levé straně byl stejný jako na pravé, musí číslo v levém dolním rohu obsahovat ve svém rozkladu činitel 3^2 a číslo v pravém dolním rohu činitel 2. Číslo v levém dolním rohu vyjádříme jako $3^2 \cdot c$, kde c označuje libovolné přirozené číslo. V pravém dolním rohu pak musí být $2 \cdot c$ a součin na levé i pravé straně je $2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot c$.



Pokud číslo v šedém poli označíme x, pak podmínka ze zadání znamená

$$3^2 \cdot c \cdot x \cdot 2 \cdot c = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot c,$$

odkud po úpravě vyjádříme

$$x = \frac{2^4 \cdot 3 \cdot 7}{c} = \frac{336}{c}.$$

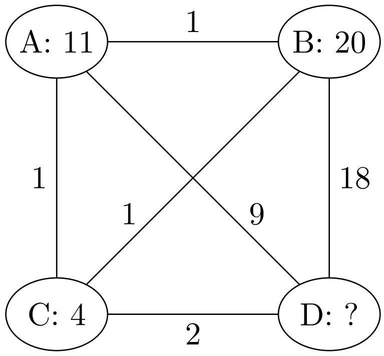
Hodnota x je nejmenší, pokud c je největší dělitel čísla v čitateli, tj. $c = 336$ a $x = 1$. Hodnota x je největší, pokud c je nejmenší kladný dělitel čísla v čitateli, tj. $c = 1$ a $x = 336$.

Z9–I–2

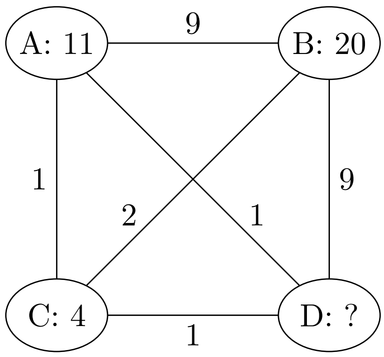
Alena, Bára, Čeněk a David si společně koupili tandem — jízdní kolo pro dva. Na projížďku vyrážejí vždy ve dvojici. Každý jel s každým už alespoň jednou a nikdo jiný se na tandemu ještě nevezl. Alena byla na projížďce jedenáctkrát, Bára dvacetkrát, Čeněk jen čtyřikrát.

Určete, kolikrát minimálně a kolikrát maximálně mohl být na projížďce David.

Možné řešení. Pokud by Alena, Bára a Čeněk jeli každý s každým právě jednou a zbytek výletů by strávili s Davidem, tak by byl David na projížďce 29krát, protože $(11 - 2) + (20 - 2) + (4 - 2) = 29$. Dvacet devět je nejvyšší možný počet. Schematicky je toto řešení znázorněno na následujícím obrázku. (Např. číslo u písmene B znamená, kolikrát celkem byla Bára na projížďce, číslo u spojnice BC vyjadřuje, kolikrát si Bára vyjela s Čeňkem. . .)



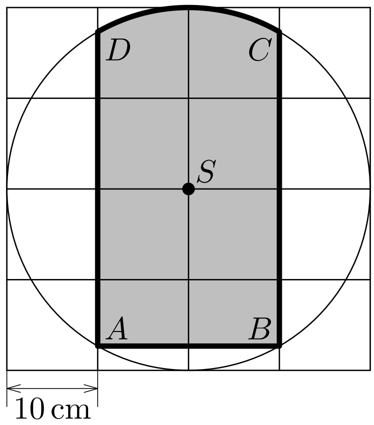
Pro řešení zbytku úlohy chceme zajistit, aby Alena, Bára a Čeněk projezdili spolu navzájem co nejvíce jízd. Alena s Bárou mohla jet maximálně 9krát $(11 - 2 = 9)$. Čeněk mohl jet jak s Alenou, tak s Bárou maximálně 2krát $(4-2 = 2)$, avšak tohoto maximálního počtu nemohl dosáhnout s oběma zároveň, protože musel jet alespoň jednou s Davidem. Při dvou jízdách Čeňka s Alenou by nemohlo být dosaženo maxima jízd Aleny s Bárou, proto dvě jízdy Čeněk realizoval s Bárou. Odtud pak plyne, kolikrát byl na projížďce David: s Alenou a s Čeňkem jednou, s Bárou 9krát $(20 - 9 - 2 = 9)$, dohromady pak 11krát $(1 + 1 + 9 = 11)$. Pro lepší orientaci v textu viz obrázek:



David mohl být na projížďce minimálně 11krát, maximálně 29krát.

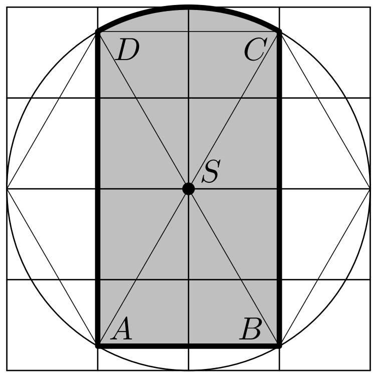
Z9–I–3

Ve čtvercové síti, jejíž čtverce mají stranu délky 10 cm, je narýsována kružnice se středem S ve vyznačeném mřížovém bodě a poloměrem 20 cm.



Body A, B, C a D jsou průsečíky kružnice se síťovými přímkami.
Určete obsah vybarvené plochy $ABCD$.

Možné řešení. Úsečka AB má délku rovnu poloměru zadané kružnice. Můžeme ji tedy považovat za stranu pravidelného šestiúhelníku vepsaného do této kružnice. Tento šestiúhelník rozdělíme na šest rovnostranných trojúhelníků, viz obrázek.



Nejdřív spočítáme obsah S_1 rovnostranného trojúhelníku o straně $r = 20$ cm. Výšku tohoto trojúhelníku vyjádříme z Pythagorovy věty $r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + v^2$. Dostaneme $v = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, tudíž

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2.$$

Vybarvená plocha se skládá z pětiúhelníku $ABCSD$, jehož obsah je $3S_1$, a kruhové výseče DSC. Kruhová výseč tvoří šestinu kruhu, její obsah je tedy roven

$$S_2 = \frac{1}{6}\pi r^2.$$

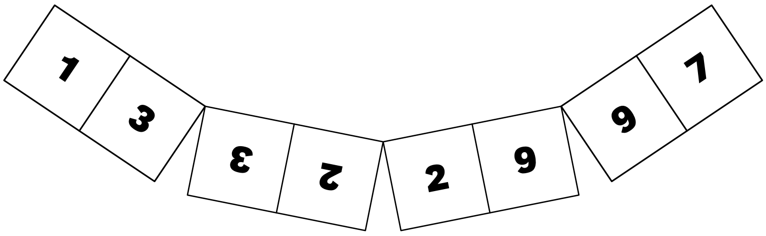
Obsah vybarvené plochy je celkem

$$S = 3S_1 + S_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 + \frac{1}{6}\pi r^2 = \frac{9\sqrt{3} + 2\pi}{12}r^2.$$

Po dosazení dostaneme přibližně $S \doteq 729\,\mathrm{cm}^2$.

Z9–I–4

Dominik si vyrobil „prvočíselné domino“ — každá kostka odpovídala jednomu dvojmístnému prvočíslu tak, že na každé polovině kostky byla jedna číslice tohoto prvočísla. Žádné dvojmístné prvočíslo v dominu nechybělo a žádné prvočíslo nebylo na dvou kostkách.



Dominik se rozhodl, že všechny kostky uspořádá do kružnice tak, aby kostky ležící vedle sebe sousedily stejnou číslicí, viz obrázek. Jeho kamarád Bořek mu řekl, že to nelze provést. Měl Bořek pravdu?

Možné řešení. V kružnici sestavené podle zadání se mají každé dvě sousední kostky dotýkat stejnou číslicí, každá číslice tedy musí být v kružnici zastoupena v sudém počtu. Všechna dvojmístná prvočísla jsou

$$11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

a počty jednotlivých číslic mezi těmito čísly jsou:

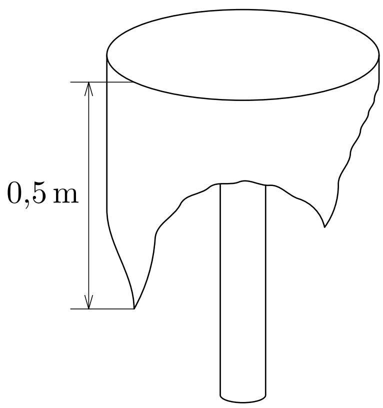
číslice	1	2	3	4	5	6	7	8	9
její počet	9×	2×	8×	3×	2×	2×	8×	2×	6×

Vidíme, že číslice 1 a 4 jsou obě zastoupeny v lichém počtu. Bořek měl tudíž pravdu a takovou kružnici nelze sestavit.

Poznámka. Lichý počet číslic 4 (resp. 1) postačuje jako důkaz toho, že kružnici nelze sestavit. Není nutné vypisovat celou tabulku.

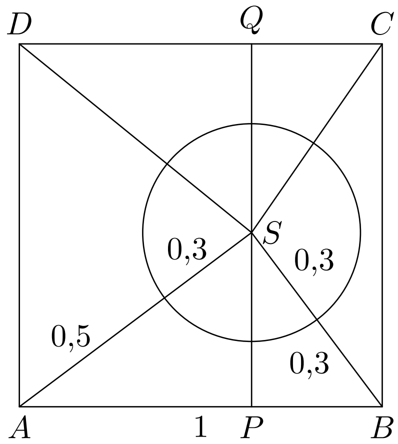
Z9–I–5

Na stole s kruhovou deskou o průměru 0,6 m je „nakřivo“ položen čtvercový ubrus se stranou 1 m. Jeden cíp ubrusu přečnívá přes hranu desky stolu 0,5 m, sousední cíp 0,3 m.



Určete délku přesahu zbylých dvou cípů.

Možné řešení. Vrcholy čtvercového ubrusu, které tvořily konce dvou cípů známých délek, označme po řadě A a B; zbylé vrcholy čtverce označíme C a D. Bod S ukazuje, kde se ubrus dotýkal středu desky stolu. Poloměr desky stolu je 0,3 m.



V trojúhelníku ABS známe ze zadání všechny strany: $|AB| = 1\,\mathrm{m}$, $|BS| = 0{,}6\,\mathrm{m}$ a $|SA| = 0{,}8\,\mathrm{m}$. Protože platí $1^2 = 0{,}6^2 + 0{,}8^2$ (Pythagorova věta), jde o trojúhelník pravoúhlý.

Označme P patu výšky v trojúhelníku ABS na stranu AB. Obsah tohoto trojúhelníku můžeme vyjádřit dvěma způsoby, a sice

$$S = \frac{1}{2}|BS| \cdot |SA| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |PS|,$$

z čehož lze odvodit vztah pro výpočet velikosti výšky PS:

$$|PS| = \frac{|BS| \cdot |SA|}{|AB|} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}8}{1} = 0{,}48\,(\mathrm{m}).$$

Podle Pythagorovy věty vypočítáme délku strany AP trojúhelníku APS a pak určíme délku úsečky PB:

$$|AP| = \sqrt{|SA|^2 - |PS|^2} = \sqrt{0{,}8^2 - 0{,}48^2} = 0{,}64\,(\mathrm{m}),$$
$$|PB| = |AB| - |AP| = 1 - 0{,}64 = 0{,}36\,(\mathrm{m}).$$

V trojúhelníku SCD označme Q patu výšky na stranu CD. Úsečky DQ, QC odpovídají svými velikostmi úsečkám AP, PB. Vypočítáme velikost výšky SQ:

$$|SQ| = |PQ| - |PS| = 1 - 0{,}48 = 0{,}52\,(\mathrm{m}).$$

Podle Pythagorovy věty vypočítáme délky přepon trojúhelníků SCQ a SQD:

$$|SC| = \sqrt{|QC|^2 + |QS|^2} = \sqrt{0{,}36^2 + 0{,}52^2} = \sqrt{0{,}4} \doteq 0{,}63\,(\mathrm{m}),$$
$$|SD| = \sqrt{|QD|^2 + |QS|^2} = \sqrt{0{,}64^2 + 0{,}52^2} = \sqrt{0{,}68} \doteq 0{,}82\,(\mathrm{m}).$$

Když od těchto délek odečteme poloměr desky stolu, zjistíme, že délky přesahů zbylých cípů ubrusu jsou přibližně 0,33 m a 0,52 m.

Z9–I–6

Čtyři tatínkové chtěli dětem sponzorovat lyžařský zájezd.
První slíbil: „Dám 11 500 Kč,“
druhý slíbil: „Dám třetinu toho, co vy ostatní dohromady,“
třetí slíbil: „Já dám čtvrtinu toho, co vy ostatní dohromady,“
čtvrtý slíbil: „A já dám pětinu toho, co vy ostatní dohromady.“
Kolik korun slíbil druhý, třetí a čtvrtý tatínek?

Možné řešení. Dal-li druhý tatínek třetinu toho, co ostatní, dal čtvrtinu celého příspěvku. (Označíme-li jeho příspěvek x, dali ostatní $3x$. Je-li celý obnos p, platí $x+3x=p$, tedy $x=\frac{p}{4}$.) Podobně, dal-li třetí čtvrtinu toho, co ostatní, dal pětinu celého obnosu, a dal-li čtvrtý pětinu toho, co ostatní, dal šestinu celého daru. Platí tedy

$$p = 11\,500 + \frac{p}{4} + \frac{p}{5} + \frac{p}{6}.$$

Po úpravě máme $\left(1-\frac{37}{60}\right)p = 11\,500$ Kč, tedy celý příspěvek p činil $30\,000$ Kč. Odtud již snadno uzavřeme, že druhý tatínek dal $\frac{p}{4} = 7\,500$ Kč, třetí $\frac{p}{5} = 6\,000$ Kč a čtvrtý $\frac{p}{6} = 5\,000$ Kč.

Poznámka. Pokud označíme příspěvek druhého, třetího, resp. čtvrtého tatínka x, y, resp. z, pak výsledné hodnoty jsou řešením následující soustavy rovnic:

$$x = \frac{1}{3}(11\,500 + y + z),\ y = \frac{1}{4}(11\,500 + x + z),\ z = \frac{1}{5}(11\,500 + x + y).$$