II. kolo kategorie Z8

Z8–II–1

Tým chce v sezóně vyhrát $\frac{3}{4}$ všech svých zápasů. V první třetině z nich však vyhrál jen 55 % zápasů.

a) Kolik procent zbývajících zápasů by musel tým vyhrát, aby dosáhl zamýšleného cíle?
b) Kdyby tým vyhrál všechny zbývající zápasy, kolik procent svých zápasů by v celé sezóně vyhrál?

Řešení. a) Tým vyhrál $\frac{55}{100}$ ze třetiny zápasů, k tomu potřebuje vyhrát dalších $p/100$ ze $\frac{2}{3}$ zápasů, aby vyhrál $\frac{3}{4}$ ze všech:

$$\frac{55}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{p}{100} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{4}.$$

Odtud dostaneme

$$p = 85.$$

Tým by tedy musel vyhrát 85 % zbývajících zápasů.

b) Kdyby tým vyhrál všechny zbývající zápasy, vyhrál by ze všech svých zápasů celkem

$$\frac{55}{100} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{255}{300} = \frac{85}{100},$$

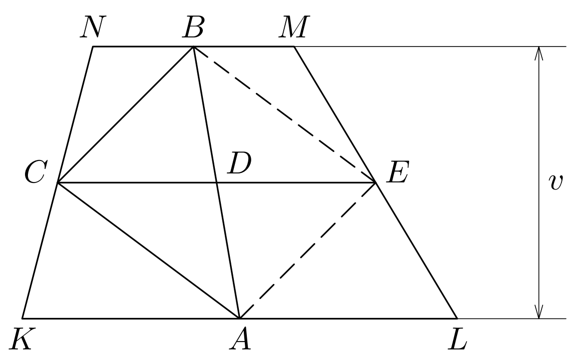
tedy 85 % všech zápasů.

[Za každou část a), b) udělte 3 body]

Z8–II–2

Jakou část obsahu nerovnoramenného lichoběžníku $KLMN$ ($KL \parallel MN$) tvoří obsah trojúhelníku ABC, kde A je střed základny KL, B je střed základny MN a C je střed ramene KN?

Řešení. Střední příčka CE lichoběžníku $KLMN$ protne úsečku AB v bodě D, který je středem obou úseček CE, AB, neboť $AEBC$ je rovnoběžník (z vlastnosti středních příček totiž plyne $AC \parallel LN \parallel EB$ a $AE \parallel KM \parallel CB$, obr.)



Označme $|KL| = a$, $|MN| = c$ a v výšku lichoběžníku $KLMN$. Pak $S_{KLMN} = \frac{1}{2}(a + c)v$, $S_{ABC} = S_{CDB} + S_{CDA}$, přitom $|CD| = \frac{1}{4}(a + c)$ (polovina střední příčky lichoběžníku). Výšky obou trojúhelníků CDB, CDA na stranu CD se rovnají $\frac{1}{2}v$, takže

$$S_{ABC} = 2 \cdot S_{CDB} = 2 \cdot \frac{\frac{a+c}{4} \cdot \frac{v}{2}}{2} = \frac{(a+c)v}{8},$$

což je $\frac{1}{4}$ obsahu celého lichoběžníku $KLMN$.

Jiné řešení. Použijeme značení a, c, v jako v předchozím odstavci. Dle zadání $|KA| = |AL| = \frac{1}{2}a$ a $|NB| = |BM| = \frac{1}{2}c$. Bod C leží na střední příčce lichoběžníku $KLMN$, má tedy stejnou vzdálenost od obou přímek základen KL a MN, a sice $\frac{1}{2}v$. Proto jak výška trojúhelníku KAC na stranu KA, tak výška trojúhelníku BNC na stranu BN je rovna $\frac{1}{2}v$. Pro příslušné obsahy tudíž platí

$$\begin{aligned} S_{KLMN} &= \frac{(a+c)v}{2}, \\ S_{ABC} &= S_{KLMN} - S_{KAC} - S_{BNC} - S_{ALMB} = \\ &= \frac{(a+c)v}{2} - \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{v}{2}}{2} - \frac{\frac{c}{2} \cdot \frac{v}{2}}{2} - \frac{\left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right)v}{2} = \\ &= \frac{(a+c)v}{2} - \frac{av}{8} - \frac{cv}{8} - \frac{(a+c)v}{4} = \frac{(a+c)v}{8}. \end{aligned}$$

Obsah trojúhelníku ABC tvoří $\frac{1}{4}$ obsahu lichoběžníku $KLMN$.

[Za úplné řešení udělte 6 bodů]

Z8–II–3

Aby přirozené číslo přinášelo Liborovi štěstí, musí být jeho druhá mocnina dělitelná čísly sedm, osm, devět i deset. Najděte všechna přirozená čísla menší než 1 000, která Liborovi přinášejí štěstí.

Řešení. Uvedené dělitele rozložme na prvočinitele:

$$7; \quad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2; \quad 9 = 3 \cdot 3; \quad 10 = 2 \cdot 5.$$

Má-li mít druhá mocnina „šťastného čísla“ všechny tyto dělitele, musí ve svém rozkladu na prvočinitele obsahovat tento součin:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

„Šťastné číslo“ coby základ druhé mocniny proto musí ve svém rozkladu na prvočinitele obsahovat tento součin:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420.$$

„Šťastné číslo“ je tedy přirozeným násobkem čísla 420. Existují pouze dvě taková čísla menší než 1 000, a sice 420 a 840.

[2 + 2 b. za výsledky, 2 b. za vysvětlení postupu]