III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Přirozené dvojmístné číslo N strašně závidělo svému kamarádovi, dvojmístnému desetinnému číslu X, jeho desetinnou čárku. Tak mu X tu svou darovalo. Číslo N si ji vložilo mezi své dvě číslice a vůbec mu nevadilo, že je teď o 567 desetin menší, než bylo předtím. Také X bylo spokojené, protože teď bylo na číselné ose svému příteli N dvakrát blíž než předtím. Zjistěte, o kterých dvou číslech N a X je tato příhoda. (*S. Bednářová*)

Řešení. Označme $N = 10a + b$ a $X = c + 0{,}1d$, kde a, b, c, d jsou číslice. Z vlastností čísla N plyne

$$10a + b - (a + 0{,}1b) = 56{,}7.$$

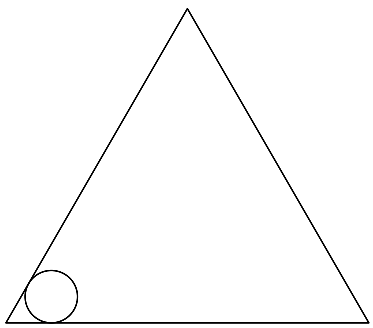
Jediné řešení je $a = 6$ a $b = 3$. Hledané číslo N je tedy 63. Z vlastností čísla X plyne

$$63 - (c + 0{,}1d) = 2 \cdot (10c + d - 6{,}3).$$

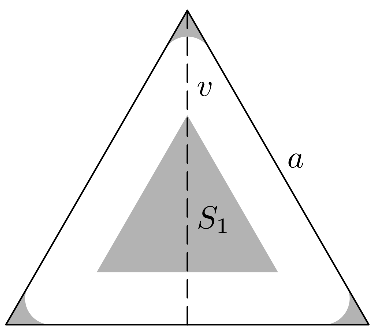
Jediné řešení je $c = 3$ a $d = 6$. Hledané číslo X je tedy 3,6.

Z9–III–2

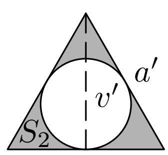
Uvnitř rovnostranného trojúhelníku se stranou délky $4\sqrt{3}$ cm se pohybuje kruh s průměrem 1 cm tak, že se stále dotýká obvodu trojúhelníku. Vypočítejte obsah té části trojúhelníku, která nemůže být nikdy překryta pohybujícím se kruhem. (*M. Dillingerová*)



Řešení. Vyjdeme z následujících obrázků.



Obr. 1



Obr. 2

Nepokrytá část trojúhelníku je na obr. 1 vyznačena šedě. Skládá se ze tří „rohů“ (tuto plochu označíme S_2) a vnitřního rovnostranného trojúhelníku (tuto plochu označíme S_1). Dáme-li rohy k sobě, dostaneme obr. 2. Postupně vypočítáme, že $v = 6\,\mathrm{cm}$, $v' = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ a $a' = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Dosazením do příslušných vzorců získáme $S_1 = 3\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ a $S_2 = \left(\frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\pi\right)\mathrm{cm}^2$. Celková nezakrytá plocha je tedy

$$S = S_1 + S_2 = \left(\tfrac{15}{4}\sqrt{3} - \tfrac{1}{4}\pi\right)\mathrm{cm}^2.$$

Z9–III–3

Maminka připravila na oslavu Jirkových narozenin pomerančový džus tak, že smíchala 1 litr 100% džusu s $\frac{2}{3}$ litru 30% džusu. Jirka si odlil do skleničky a ochutnal. Protože má radši slabší koncentraci, dolil připravený džus na původní množství. Výsledný džus měl koncentraci 61,2 %, a to mu vyhovovalo. Jaké množství džusu si Jirka odlil do skleničky? (*M. Raabová*)

Řešení. Sestavíme rovnici

$$1 \cdot 100 + \frac{2}{3} \cdot 30 = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot x,$$

kde x je koncentrace směsi dvou druhů džusů, a spočteme

$$100 + 20 = \tfrac{5}{3}x \quad \Rightarrow \quad x = 72.$$

Koncentrace směsi je 72 %. Nyní označíme y množství džusu, který si Jirka odlil. Sestavíme a vypočítáme další rovnici:

$$\left(\frac{5}{3} - y\right) \cdot 72 = \frac{5}{3} \cdot 61{,}2 \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}25.$$

Jirka si odlil 0,25 l džusu.

Z9–III–4

Je dán trojúhelník. Jestliže jeho nejdelší stranu zkrátíme o třetinu její délky, nejkratší stranu zdvojnásobíme a zbývající stranu zmenšíme o 2 cm, dostaneme trojúhelník shodný s původním trojúhelníkem. Jaké jsou rozměry tohoto trojúhelníku? (*M. Raabová*)

Řešení. Označme strany trojúhelníku a, b, c, můžeme předpokládat, že $a > b > c$. Ze zadání úlohy plyne, že stranu zkracuji o 2 cm, musím tedy dostat stranu c, neboli $b - 2 = c$. Dále platí, že $\frac{2}{3} = b$ a $2c = a$. Jediným řešením této soustavy je $a = 12$, $b = 8$, $c = 6$.