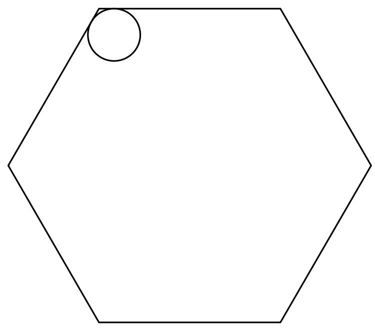
Komentáře k domácímu kolu kategorie Z9

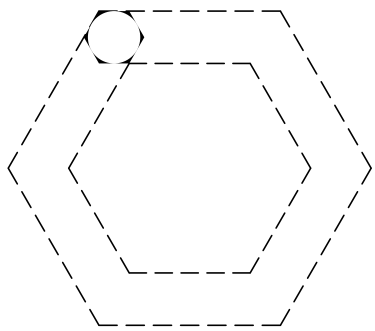
1. *Dvoumístné číslo se nazývá* exkluzivní, *jestliže má následující vlastnost: číslice exkluzivního čísla navzájem vynásobíme, po přičtení součtu všech číslic exkluzivního čísla k předchozímu výsledku získáme toto exkluzivní číslo. Například 79 je exkluzivní, neboť $79 = 7 \cdot 9 + (7 + 9)$. Najděte všechna exkluzivní čísla.*

Řešení. Každé dvoumístné číslo můžeme psát ve tvaru $10a + b$, kde a a b jsou číslice. Potom hledaná čísla musí splňovat následující rovnici: $10a + b = a \cdot b + a + b$, odkud dostáváme $9 \cdot a = a \cdot b$. Protože hledané číslo je dvoumístné, musí být $a \neq 0$, a tedy $b = 9$. Danou podmínku splňuje každé dvoumístné číslo, jehož číslice na místě jednotek je 9. Hledaná čísla jsou: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

2. *Uvnitř pravidelného šestiúhelníku o straně délky $2\sqrt{3}$ cm se pohybuje kruh o průměru 1 cm tak, že se stále dotýká obvodu pravidelného šestiúhelníku. Vypočítejte obsah té části šestiúhelníku, která nemůže být nikdy překryta pohybujícím se kruhem.*

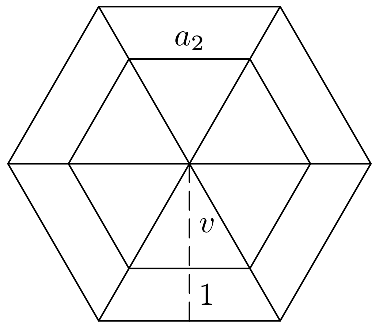


Řešení. Nepřekrytou oblast si rozdělíme na dvě části. První z nich jsou „kouty" u vrcholů, druhou vnitřní část — šestiúhelník. Nejprve vypočteme obsah S_1 „koutů". Pokud bychom je dali „k sobě", dostali bychom následující obrazec:



S_1 je potom rovno rozdílu obsahu pravidelného šestiúhelníku opsaného kruhu s průměrem 1 cm a obsahu tohoto kruhu. Šestiúhelník rozdělíme na šest shodných rovnostranných trojúhelníků, které mají výšku 0,5 cm. Stranu a_1 tohoto trojúhelníku vypočteme z Pythagorovy věty: $a_1^2 = (\frac{1}{2}a_1)^2 + 0{,}5^2$, odtud $a_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ cm. Obsah celého šestiúhelníku je $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot 0{,}5 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (cm^2). Obsah kruhu je $\pi \cdot 0{,}5^2 = \frac{1}{4}\pi$ (cm^2). Odtud $S_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\pi$ (cm^2).

Nyní vypočteme obsah S_2 „vnitřního šestiúhelníku“. Stejnými úvahami a užitím podobnosti zjistíme, že strana a_2 tohoto šestiúhelníku měří $\frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3}$ cm a výška v příslušného rovnostranného trojúhelníku 2 cm.



Odtud $S_2 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = 8\sqrt{3}$ (cm^2).

Celkový obsah je roven $S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\pi + 8\sqrt{3} = \frac{1}{2}17\sqrt{3} - \frac{1}{4}\pi$ (cm^2).

3. *Kolika způsoby lze vybrat sedm čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 8, 9\}$ tak, aby jejich součet byl dělitelný třemi?*

Řešení. Úlohu je výhodné řešit obráceně: Kolika způsoby můžeme vybrat dvě čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, 8, 9\}$ tak, aby součet zbylých sedmi byl dělitelný třemi? Součet všech čísel z této množiny je $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9 = 45$, což je číslo dělitelné třemi. Součet dvou čísel, která musíme odebrat, je tedy také dělitelný třemi. Nyní si rozdělíme čísla v množině na tři skupiny:

1. skupina: $\{3, 6, 9\}$ — čísla dělitelná třemi,
2. skupina: $\{1, 4, 7\}$ — čísla dávající po dělení třemi zbytek 1,
3. skupina: $\{2, 5, 8\}$ — čísla dávající po dělení třemi zbytek 2.

Můžeme vybrat dvojici čísel z první skupiny, to jsou tři možnosti. Pokud vezmeme jedno číslo (ze tří) z druhé skupiny, musíme spolu s ním vzít i jedno (libovolné) číslo ze třetí skupiny; máme $3 \cdot 3 = 9$ možností výběru. Celkem tedy $3 + 9 = 12$ možností.

4. *Jsou dány kruh a čtverec se stejným obsahem. Do daného kruhu vepíšeme čtverec, do daného čtverce vepíšeme kruh. Který z vepsaných obrazců má větší obsah?*

Řešení. Označme r poloměr daného kruhu a a stranu daného čtverce. Ze zadání vyplývá, že $S = \pi r^2 = a^2$. Kruh vepsaný do daného čtverce má průměr a, tedy poloměr $\frac{1}{2}a$. Odtud obsah vepsaného kruhu je $S_1 = \pi \cdot (\frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}\pi a^2$, po dosazení πr^2 za a^2 dostáváme: $S_1 = \frac{1}{4}\pi^2 r^2$.

Obdobně budeme postupovat i při určování obsahu čtverce vepsaného do daného kruhu. Tento čtverec je rozdělen úhlopříčkou na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, jejichž přepona má délku $2r$ a výška na tuto přeponu r. Obsah jednoho takového trojúhelníku je $S' = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = r^2$, obsah S_2 celého vepsaného čtverce je dvojnásobný, tedy $S_2 = 2r^2$.

Protože číslo $\frac{1}{4}\pi^2$ je větší než 2, je i $S_2 > S_1$. Vepsaný kruh má větší obsah než vepsaný čtverec.

5. *Pan Sudý měl sudý počet oveček, pan Lichý lichý počet oveček. Počet všech oveček dohromady tvořil trojmístné číslo, které mělo všechny číslice stejné. Každé ovečce pana Sudého se narodily tři ovečky, každé ovečce pana Lichého dvě ovečky. Jednoho dne však vlk zadávil tři ovečky panu Sudému. Teď má pan Sudý stejně velké stádo jako pan Lichý. Kolik oveček měl původně každý z chovatelů?*

Řešení. Označme $2x$ počet oveček pana Sudého a $2y+1$ počet oveček pana Lichého. Potom počet všech oveček dohromady (tj. $2x + 2y + 1$) je jedno z čísel 111, 333, 555, 777, 999 (musí to být liché číslo). Odtud $x+y$ je 55, 166, 277, 388 nebo 499. Po narození oveček měl pan Sudý celkem $2x+3\cdot 2x = 8x$ oveček a pan Lichý $2y+1+2\cdot(2y+1) = 6y+3$ oveček. Pak musí platit: $8x - 3 = 6y + 3$. Dosazováním $55 - x, 166 - x, \ldots$ postupně za y dostáváme rovnice, z nichž jen jediná má řešení v oboru přirozených čísel: $x = 24$, $y = 31$. Pan Sudý měl tedy $2 \cdot 24 = 48$ oveček a pan Lichý $2 \cdot 31 + 1 = 63$ oveček.

6. *Pět dětí postupně říká: „Včera bylo pondělí.“ „Dnes je čtvrtek.“ „Pozítří bude pátek.“ „Zítra bude sobota.“ „Předevčírem bylo úterý.“ Pokud byste věděli, kolik z dětí lhalo, hned by bylo jasné, který je den. Který je tedy den?*

Řešení. Děti vlastně postupně tvrdily, že je: úterý, čtvrtek, středa, pátek, čtvrtek. Lhát musely aspoň tři z nich. Pokud lhaly tři a dvě mluvily pravdu, je čtvrtek. Pokud lhaly čtyři a jedno mluvilo pravdu, může být úterý, středa nebo pátek. Pokud lhaly všechny děti, může být pondělí, sobota nebo neděle. Jestliže ale stačí vědět, kolik z dětí lhalo, k tomu, abychom věděli, který je den, musí být tento den jednoznačně určen „počtem lhářů“. Je tedy čtvrtek (tři děti lhaly).