Komentáře k domácímu kolu kategorie Z8

1. *Pořadové číslo dne v měsíci je* smutné, *protože v jistém roce nebylo ani jednou neděli. Jaké číslo to bylo a na který den v týdnu připadl v tom roce Nový rok?*

Řešení. A. Nepřestupný rok: Padne-li (v nepřestupném roce) pořadové číslo dne

v lednu…	na den D (týdne), pak
v únoru…	na $D+3$ (protože I má 31 dní, $31 = 7\cdot 4+3$),
v březnu…	na $D+3$ (protože II má 28 dní, tj. právě 4 týdny, $28 = 4\cdot 7$, den týdne se proti únoru nemění),
v dubnu…	na $D+6$ (protože III má 31 dní, $31 = 7\cdot 4+3$, $D+3+3 = D+6$),
v květnu…	na $D+1$ (IV má 30 dní, $30 = 4\cdot 7+2$, $D+6+2 = D+7+1$, 7 dní je celý týden), dále již stručněji:
v červnu…	na $D+4$,
v červenci…	na $D+6$,
v srpnu…	na $D+2$ (VII má 31 dní, $31 = 4\cdot 7+3$, $D+6+3 = (D+7)+2$),
v září…	na $D+5$,
v říjnu…	na D (IX má 30 dní, $30 = 4\cdot 7+2$, $D+5+2 = D+7$, tj. týž den týdne jako D):
v listopadu…	na $D+3$,
v prosinci…	na $D+5$.

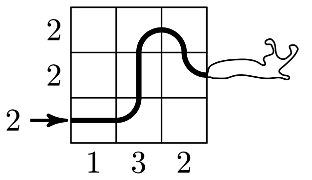
Pro pořadová čísla 1–28 se vystřídají všechny dny v týdnu: D (I, X), $D+1$ (V), $D+2$ (VIII), $D+3$ (II, III, XI), $D+4$ (VI), $D+5$ (IX, XII), $D+6$ (IV, VII). Pro pořadová čísla 29., 30., 31. chybějící v II mají příslušný den týdne v III (a 29., 30. i v XI). Pořadové číslo dne 31. není v IX (ale stejný den týdne připadne na XII) a v IV (ale stejný den připadne na VII) a také není v VI. Kdyby mělo 31. připadnout v červnu na neděli (tj. den $D+4$ je neděle), připadlo by 31. 1. (a tedy i 3. 1.) na středu ($3+4\cdot 7 = 31$) a rok by začínal v pondělí. V nepřestupném roce začínajícím v pondělí je smutné číslo 31. (31. 1. je středa, 31. 3. sobota, 31. 5. čtvrtek, 31. 7. úterý, 31. 8. pátek, 31. 10. opět středa a 31. 12. pondělí).

B. Stručně pro přestupný rok:

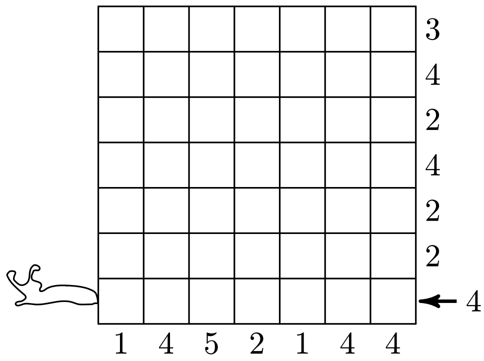
I	$\ldots D$,	VII	$\ldots D$,
II	$\ldots D+3$,	VIII	$\ldots D+3$,
III	$\ldots D+4$,	IX	$\ldots D+6$,
IV	$\ldots D$,	X	$\ldots D+1$,
V	$\ldots D+2$,	XI	$\ldots D+4$,
VI	$\ldots D+5$,	XII	$\ldots D+6$.

Den D (I, IV, VII), $D+1$ (X), $D+2$ (V), $D+3$ (II, VIII), $D+4$ (III, XI), $D+5$ (VI), $D+6$ (IX, XII). Opět jde o 31., které by mělo připadnout na neděli v červnu (má ale jen 30 dní). Den $D+5$ je neděle, 31. 1. a také 3. 1. je den D, tedy úterý a rok začíná nedělí. V přestupném roce, který začíná nedělí, je smutné číslo 31.

2. *Slimák lezl po čtvercové síti a zanechal za sebou stopu (obr. 1). Čísla pod sítí a vedle ní údávají počet navštívených čtverečků v daném řádku či sloupci. Na obr. 2 určete dráhu slimáka, víte-li, že nikdy nevlezl dvakrát do stejného čtverečku a že nikdy nelezl šikmo.*

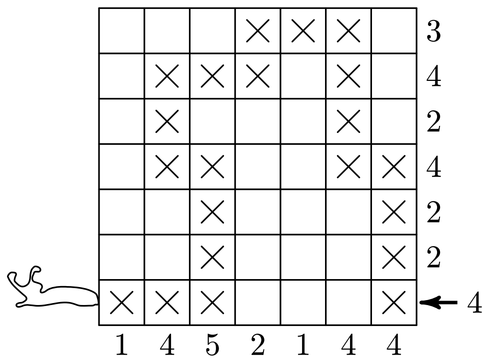


Obr. 1



Obr. 2

Vstup i výstup slimáka je v dolním řádku. Třemi čtverečky však slimák projde i v řádku nejvýše položeném. Musí tedy z dolního řádku „vystoupat“ nahoru a zase projít dolů. Řádky, označené číslem 2 (jsou takové tři) projde jen jednou svisle vzhůru a jednou svisle dolů. Obě části cesty (vzhůru a dolů) budou spojeny v nejvyšším řádku třemi políčky. Pátý sloupec má obsazeno jen jedno pole — bude to právě pole v nejvyšším řádku na spojnici obou částí cesty. Řádky označené číslem 4 budou obsahovat buď dva vodorovné úseky o dvou polích (pro cestu nahoru a pro cestu dolů), nebo jeden úsek se třemi poli a jeden o jednom poli. Protože je 1. sloupec označen číslem 1, nemůže se v něm slimák vyskytovat vícekrát a spodní řádek tedy musí mít obsazení buď ××○○○××, nebo ×××○○○×. První možnost však nevyhovuje (např. nelze obsadit pět polí 3. sloupce). Jediné řešení je na obrázku.



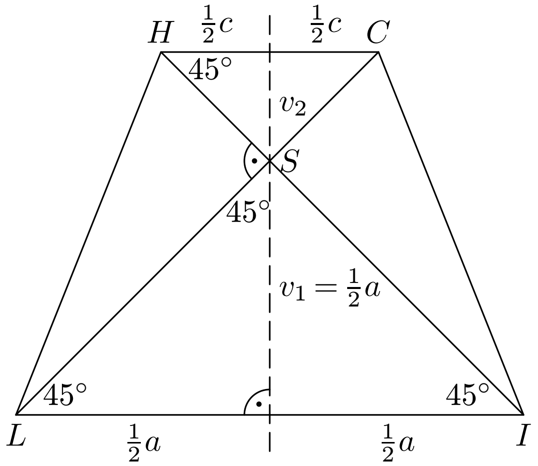
3. *O lichoběžníku $LICH$ ($LI \parallel CH$) víme, že $LC \perp HI$, $|\sphericalangle ILC| = |\sphericalangle IHC|$ a aritmetický průměr délek jeho základen je 8 cm. Vypočítejte obsah tohoto lichoběžníku.*

Řešení. Je dáno $LICH$. Z vlastností střídavých úhlů plyne, že $|\sphericalangle IHC| = |\sphericalangle LIH|$ a $|\sphericalangle ILC| = |\sphericalangle LCH|$.

O lichoběžníku víme, že $|\sphericalangle ILC| = |\sphericalangle IHC|$. Je tedy

$$|\sphericalangle ILC| = |\sphericalangle LCH| = |\sphericalangle IHC| = |\sphericalangle LIH|.$$

Označme S průsečík úhlopříček (obr.). Oba trojúhelníky LIS, HCS jsou rovnoramenné (protože mají shodné úhly při základně LI, resp. HC) a pravoúhlé. Velikost úhlů při základně je 45° (jsou shodné a jejich součet je 90°). Výšky spuštěné na základnu pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku mají velikost rovnu polovině velikosti základny (rozdělí trojúhelník na dva shodné rovnoramenné trojúhelníky).



Označme $|LI| = a$, $|HC| = c$. Výška v trojúhelníku LIS má velikost $v_1 = \frac{1}{2}a$, v trojúhelníku HCS je $v_2 = \frac{1}{2}c$. Výška lichoběžníku je $v = v_1 + v_2$ a jeho obsah

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{a+c}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right) = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2}.$$

Protože je dáno, že aritmetický průměr délek základen lichoběžníku je $8\,\mathrm{cm} = \frac{1}{2}(a+c)$, bude $S = 8 \cdot 8 = 64$ (cm^2).

4. *Kolik je mezi čísly $1, 2, 3, \ldots, 999, 1\,000$ takových, která nejsou dělitelná žádným z čísel 2, 3, 4, 5?*

Řešení. Není-li číslo dělitelné číslem 2, nebude dělitelné ani číslem 4. Číslo 4 tedy můžeme z úvah vyloučit. Je

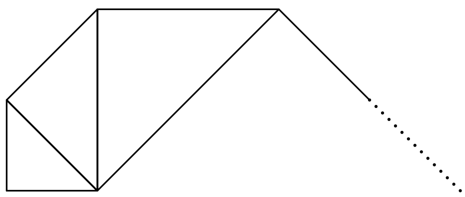
$$n(2; 3; 5) = 30.$$

Uvažme, kolik je přirozených čísel, která nejsou dělitelná žádným z čísel 2, 3, 5, mezi prvními 30 čísly — vypišme je: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Je jich celkem 8. Takových třicetic je 33 ($1\,000 = 30 \cdot 33 + 10$), hledaných čísel v nich bude celkem $8 \cdot 33$, ve zbývajících deseti budou ještě dvě. Celkem jich je $8 \cdot 33 + 2 = 266$.

5. *Alenka sestavovala „hlemýždí ulitu“ z rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků jako na obrázku. Použila k tomu co nejvíc trojúhelníků, ale žádné dva se nepřekrývaly.*

a) Z kolika trojúhelníků byla ulita sestavena?

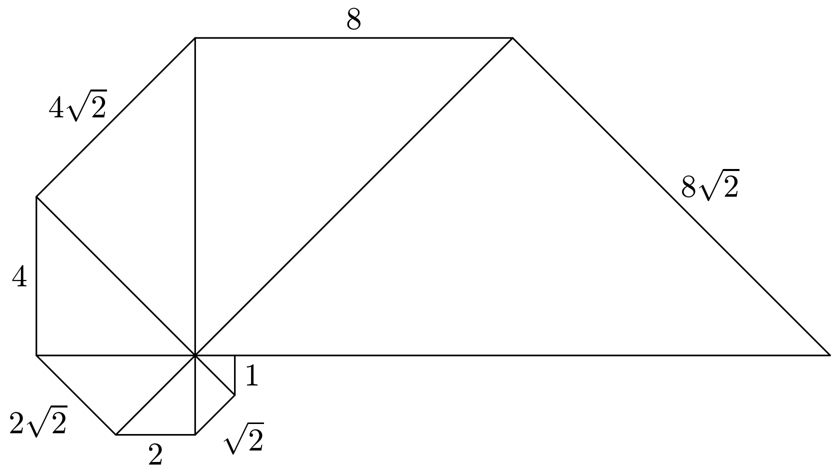
b) Jaký je obsah největšího trojúhelníku, je-li odvěsna nejmenšího z nich dlouhá 1 cm?



Řešení. a) Ulita je složena z rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků, které mají ostré úhly 45°. Takových úhlů je do 360° osm $(360 : 45 = 8)$, proto i trojúhelníků bude osm. Platí, že přepona menšího trojúhelníku je zároveň odvěsnou sousedního většího trojúhelníku.

b) Velikosti odvěsen osmi trojúhelníků jsou po řadě (výpočet pomocí Pythagorovy věty) 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$, 8, $8\sqrt{2}$. Největší trojúhelník má odvěsny o velikosti $8\sqrt{2}$, a jeho obsah je tedy

$$S = \frac{8\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2}}{2} = 64 \ (\mathrm{cm}^2).$$



6. *Archeologové vykopali papyrus se zvláštní tabulkou s výřezem ve tvaru „obráceného Z“ (obrázek). Jde zřejmě o talisman. Měl zajímavou vlastnost: zakroužkujeme-li libovolných pět čísel tak, aby v každém sloupci i řádku bylo zakroužkováno právě jedno, a těchto pět čísel sečteme, dostaneme vždy stejný součet. Pokuste se zrekonstruovat tento talisman, tzn. doplňte čísla na prázdná místa.*

0				4
		3	2	
				9
	8	5		
6		7		

Řešení. Nejprve určíme „magický“ součet. Začneme číslem, které je „samo“ v řádku nebo sloupci, např. číslem 9, a vybereme k němu podle daného pravidla čtyři další:

$$9 + 0 + 8 + 7 + 2 = 26.$$

Pak opět vybíráme podle daného pravidla čtyři čísla a k součtu 26 dopočteme páté, např.

$$6 + 8 + 9 + 2 + x = 26,$$

tedy $x = 1$ (x je prostřední číslo v 1. řádku);

$$6 + 5 + 9 + 2 + y = 26,$$

tedy $y = 4$ (y je 2. číslo v 1. řádku) atd., až je vyplněna celá tabulka.

0	4	1	0	4
2		3	2	6
5				9
4	8	5		8
6	10	7	6	10