# II. kolo kategorie Z6

## Z6–II–1

Honzík dostal na Vánoce knihu, kterou hned na Štědrý den začal číst. Četl pak denně stejný počet stran, a to až do 31. ledna v novém roce. Toho dne zjistil, že zatím přečetl 78 stran, což byla právě třetina knihy. Současně zjistil, že pokud by chtěl knihu dočíst právě v den svých narozenin, musel by počínaje zítřkem každý den přečíst o čtyři strany víc než doposud.

Určete, kdy má Honzík narozeniny. (*M. Smitková*)

**Možné řešení.** Protože 78 stran odpovídá třetině knihy, má celá kniha $3 \cdot 78 = 234$ stran. Honzíkovi zbývá přečíst ještě $234 - 78 = 156$ stran.

Od Vánoc do 31. ledna uplynulo celkem $8 + 31 = 39$ dní. Proto Honzík denně přečetl $78 : 39 = 2$ strany. Pokud by počínaje 1. únorem denně přečetl o čtyři strany více než dosud, tedy šest stran, dočetl by knihu za $156 : 6 = 26$ dní. Honzík má narozeniny 26. února.

**Hodnocení.** Po 1 bodu za každý z dílčích výsledků (kniha má 234 stran, zbývá dočíst 156 stran, do konce ledna četl 39 dní, četl 2 strany denně, knihu dočte za 26 dní); 1 bod za den narozenin.

## Z6–II–2

Evička měla stavebnici s devíti dílky, které byly označeny 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9. Časem se jí podařilo všechny dílky ztratit, a to následujícím způsobem:

- nejprve ztratila čtyři dílky označené lichými číslicemi,
- poté ztratila dílky se součinem číslic 24,
- nakonec ztratila poslední dva dílky, na nichž byly sudé číslice.

Zjistěte, které číslice mohly být napsány na posledních dvou dílcích. Najděte dvě řešení. (*E. Novotná*)

**Možné řešení.** Mezi uvedenými čísly je pět lichých čísel a čtyři sudá čísla. Po ztrátě čtyř lichých čísel tak Evičce zůstalo jedno liché číslo a všechna čtyři sudá (2, 4, 6, 8). Protože 24 není násobkem 5, 7, ani 9, avšak je násobkem 1 a 3, mohlo být zbývající liché číslo buď 1, nebo 3.

Po ztrátě dílků se součinem 24 zbyla jenom dvě sudá čísla. Tento součin proto musel být vyjádřen pomocí jednoho lichého čísla (a to buď 1, nebo 3) a dvou sudých čísel (vybraných z 2, 4, 6 a 8). To je možné buď jako $24 = 1 \cdot 4 \cdot 6$, nebo jako $24 = 3 \cdot 2 \cdot 4$. V prvním případě by na posledních dvou dílcích byla čísla 2 a 8, ve druhém případě by to byla čísla 6 a 8.

**Hodnocení.** 2 body za zjištění, že zbylé liché číslo bylo buď 1, nebo 3; 2 body za zjištění, že 24 má být součinem jednoho lichého a dvou sudých čísel; 2 body za rozbor možností a závěr.

Pokud řešitel nejprve uvažuje všemožné součiny jako $24 = 3 \cdot 8 = 1 \cdot 3 \cdot 8$ apod. a odtud vybírá vyhovující možnosti, musí být z komentáře zřejmé, proč vyhovují. Za řešení bez zdůvodnění udělte nejvýše 2 body.

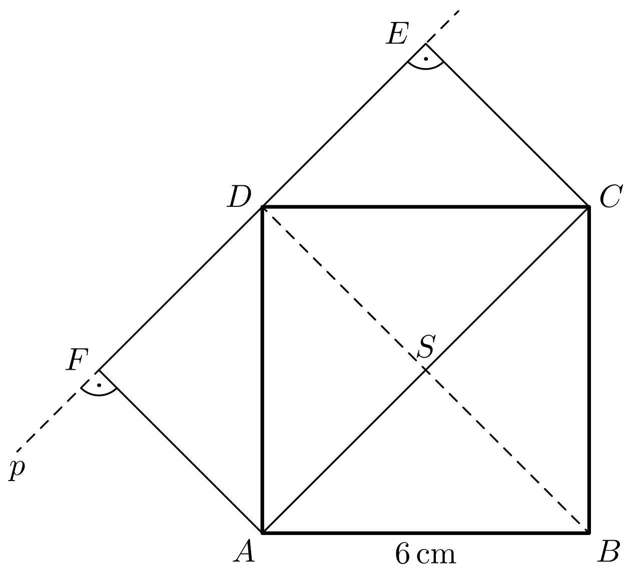
**Z6–II–3**

Sestrojte čtverec $ABCD$ se stranou délky 6 cm. Sestrojte přímku $p$ rovnoběžnou s úhlopříčkou $AC$ a procházející bodem $D$. Sestrojte obdélník $ACEF$ tak, aby vrcholy $E$ a $F$ ležely na přímce $p$.

Ze zadaných údajů vypočtěte obsah obdélníku $ACEF$. (*L. Růžičková*)

**Možné řešení.** Konstrukce:

- Čtverec $ABCD$ se stranou délky 6 cm,
- přímka $p$ jako rovnoběžka s přímkou $AC$ (resp. kolmice k přímce $BD$) jdoucí bodem $D$,
- bod $E$ jako pata kolmice k přímce $p$ jdoucí bodem $C$,
- bod $F$ jako pata kolmice k přímce $p$ jdoucí bodem $A$.




Výpočet: Úhlopříčky ve čtverci jsou shodné, navzájem kolmé a jejich průsečík je středem obou úhlopříček. Průsečík úhlopříček ve čtverci $ABCD$ označíme $S$.

Z uvedeného vyplývá, že čtverec $ABCD$ je úhlopříčkami rozdělen na čtyři navzájem shodné trojúhelníky $ABS$, $BCS$, $CDS$ a $DAS$. Dále obdélník $ACEF$ je úsečkou $SD$ rozdělen na dva shodné čtverce, přičemž každý z nich je dále rozdělen úhlopříčkou ($CD$, resp. $DA$) na dva shodné trojúhelníky. Jak čtverec $ABCD$, tak obdélník $ACEF$ tedy sestává ze čtyř navzájem shodných trojúhelníků, z nichž dva jsou oběma útvarům společné. Proto má obdélník $ACEF$ stejný obsah jako čtverec $ABCD$, a ten je

$$6 \cdot 6 = 36\,(\mathrm{cm}^2).$$

**Hodnocení.** 2 body za provedení konstrukce; 4 body za výpočet, z toho 3 body za rozdělení na shodné trojúhelníky a 1 bod za určení obsahu. Výpočet založený na pouhém měření v obrázku, resp. správný výsledek bez zdůvodnění nehodnoťte.