II. kolo kategorie Z5

Z5–II–1

Otec hrál se strýčkem šachy. Za vyhranou partii dostal vítěz od soupeře 8 korun, za remízu nikdo nic. Strýc vyhrál čtyřikrát, remíz bylo pět a otec nakonec získal 24 korun.

Kolik partií otec se strýčkem sehráli? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Otec čtyřikrát prohrál, takže musel strýci zaplatit $4 \cdot 8 = 32$ korun.

Otec však vyhrál tolikrát, že i po zaplacení těchto 32 korun získal 24 korun. Jeho celková výhra byla $32 + 24 = 56$ korun, vyhrál tedy $56 : 8 = 7$ partií.

Otec sedmkrát vyhrál, čtyřikrát prohrál a pětkrát remizoval, se strýčkem tedy sehrál $7 + 4 + 5 = 16$ partií.

Návrh hodnocení. 2 body za určení otcovy celkové výhry; 2 body za počet otcových vyhraných partií; 2 body za počet všech sehraných partií.

Z5–II–2

Veverka Hryzka ujídala oříšky ze svých zásob následujícím způsobem:

- v dietní den snědla jeden oříšek,
- v normální den snědla o dva oříšky víc než v dietní den.

Jistých 19 po sobě jdoucích dní se pravidelně střídaly dny dietní s dny normálními.

Zjistěte, kolik nejvíce a kolik nejméně oříšků mohla Hryzka během těchto 19 dnů sníst. (*E. Novotná*)

Možné řešení. Veverka snědla v dietní den jeden oříšek, v normální den tedy snědla tři oříšky. Oba typy dnů se pravidelně střídaly, proto se typ dne, kterým 19denní období začínalo, opakoval celkem 10krát, druhý typ se opakoval 9krát.

Protože nevíme, zda sledované období začínalo dietním, nebo normálním dnem, musíme uvážit obě možnosti:

a) pokud se začínalo dietním dnem, snědla veverka $10 \cdot 1 + 9 \cdot 3 = 37$ oříšků,
b) pokud se začínalo normálním dnem, snědla veverka $10 \cdot 3 + 9 \cdot 1 = 39$ oříšků.

Veverka snědla nejméně 37 a nejvíce 39 oříšků.

Návrh hodnocení. 1 bod za počet oříšků snědených v normální den; po 2 bodech za celkový počet snědených oříšků u každé z možností; 1 bod za závěr.

Z5–II–3

Ema chce sestrojit trojúhelník ABC se stranami $|AB| = 3$ cm a $|BC| = 4$ cm. Dále chce sestrojit všechny kružnice, z nichž každá bude mít střed v některém z vrcholů trojúhelníku a bude procházet některým jeho jiným vrcholem.

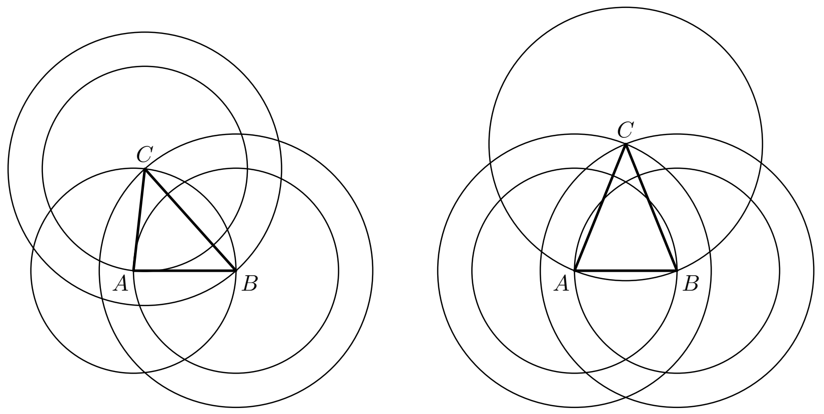
Jak dlouhá musí být strana AC, aby takových kružnic bylo právě pět? Určete všechny možnosti. (*V. Hucíková*)

Možné řešení. Kdyby strany AB a AC byly stejně dlouhé, pak kružnice se středem v bodě A procházející bodem B by procházela také bodem C. V takovém případě by Ema sestrojila jedinou kružnici se středem v bodě A.

Kdyby strany AB a AC byly různě dlouhé, pak kružnice se středem v bodě A procházející jedním z bodů B a C nebude procházet tím druhým. V takovém případě by Ema sestrojila dvě kružnice se středem v bodě A.

Obdobné případy mohou nastat také pro kružnice se středem v bodě C. Kružnice se středem v bodě B budou jistě dvě, protože ze zadání víme, že strany BA a BC jsou různě dlouhé.

Pokud by strany trojúhelníku ABC byly navzájem různé, potom by Ema sestrojila $2 + 2 + 2 = 6$ kružnic. Pokud by strana AC byla shodná s jednou ze zbylých dvou stran, potom by Ema sestrojila $1 + 2 + 2 = 5$ kružnic. Strana AC proto musí být dlouhá buď 3 cm, nebo 4 cm.



Návrh hodnocení. Po 1 bodu za každou ze dvou vyhovujících možností; 3 body za zdůvodnění správného počtu kružnic; 1 bod za vysvětlení, že jiné možnosti nejsou.

Zdůvodnění správného počtu kružnic pouze u jedné ze dvou vyhovujících možností považujte za postačující.