65. ročník Matematické olympiády

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Ve Zverimexu vyprodávali rybky z jednoho akvária. Ondra chtěl polovinu všech rybek, ale aby nemuseli žádnou rybku řezat, dostal o polovinu rybky víc, než požadoval. Matěj si přál polovinu zbylých rybek, ale stejně jako Ondřej dostal o polovinu rybky víc, než požadoval. Nakonec Petřík chtěl polovinu zbylých rybek, ale také dostal o polovinu rybky víc, než požadoval. Poté bylo akvárium bez rybek.

Kolik rybek bylo původně v akváriu a kolik jich dostal Ondra, kolik Matěj a kolik Petřík? (*M. Volfová*)

Možné řešení. Budeme uvažovat odzadu:

Petřík dostal o polovinu rybky víc, než byla polovina všech rybek, které zbyly po Matějovi. Protože poté bylo akvárium prázdné, byla ona polovina rybky navíc právě polovinou toho, co zbylo po Matějovi. Po Matějově nákupu tedy zbyla v akváriu jedna rybka.

Matěj dostal o polovinu rybky víc, než byla polovina všech rybek, které zbyly po Ondřejovi. Protože poté zbyla v akváriu jedna rybka, byla tato rybka a polovina rybky navíc právě polovinou toho, co zbylo po Ondřejovi. Po Ondřejově nákupu zbyly v akváriu tři rybky.

Ondřej dostal o polovinu rybky víc, než byla polovina všech rybek, které byly původně v akváriu. Protože poté zbyly v akváriu tři rybky, byly tyto tři rybky a polovina rybky navíc právě polovinou původního množství rybek. Původně bylo v akváriu sedm rybek. Tedy Ondřej dostal čtyři rybky, Matěj dvě a Petřík jednu rybku.

Návrh hodnocení. 1 bod za určení zbytku po Matějovi; 2 body za určení zbytku po Ondřejovi; 3 body za určení původního množství a počtů rybek, které si odnesli jednotliví chlapci.

Jiné řešení. Pokud původní počet rybek v akváriu označíme x, potom můžeme další počty postupně vyjádřit takto:

	dostal	zbylo
Ondřej	$\frac{x+1}{2}$	$\frac{x-1}{2}$
Matěj	$\frac{x+1}{4}$	$\frac{x-3}{4}$
Petřík	$\frac{x+1}{8}$	$\frac{x-7}{8}$

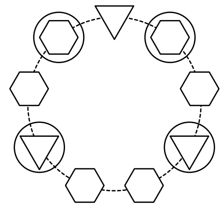
Odtud je patrné, že po Petříkově nákupu mohlo být akvárium bez rybek právě tehdy, když $x = 7$. Dosazením snadno určíme počty rybek, které si odnesli jednotliví chlapci.

Návrh hodnocení. 2 body za předposlední řádek tabulky; 2 body za poslední řádek tabulky; 1 bod za vyčíslení neznámé; 1 bod za počty rybek pro jednotlivé chlapce.

Z9–II–2

Zuzka vepsala do devíti polí na následujícím obrázku celá čísla od 1 do 9, každé právě jednou. Poměr součtů čísel napsaných v kruzích, trojúhelnících a šestiúhelnících byl 2 : 3 : 6.

Zjistěte, jaké číslo mohlo být napsáno v horním trojúhelníku; určete všechny možnosti. (*E. Novotná*)



Možné řešení. Součet všech čísel vepsaných do polí na obrázku je roven

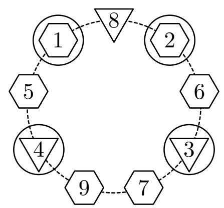
$$1 + 2 + \ldots + 9 = 45.$$

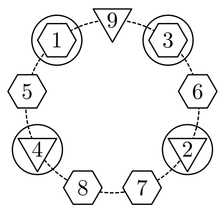
Čísla v trojúhelnících a čísla v šestiúhelnících jsou navzájem různá a poměr jejich součtů je $3 : 6 = 1 : 2$. Odtud vyplývá, že součet čísel v trojúhelnících je 15 a součet čísel v šestiúhelnících je 30. Protože poměr součtů čísel v kruzích a v trojúhelnících je $2 : 3$, součet čísel v kruzích je 10.

Na obrázku jsou čtyři kruhy, tedy v kruzích musí být čísla 1, 2, 3 a 4 (jakákoli jiná čtveřice by měla součet větší než 10). Z těchto čtyř čísel jsou dvě obsažena také v trojúhelnících — ve zbývajícím horním trojúhelníku má být takové číslo, aby součet těchto tří čísel byl 15. Největší možný součet čísel ve dvou spodních trojúhelnících je 7, proto nejmenší možné číslo v horním trojúhelníku je 8. Současně v horním trojúhelníku nemůže být větší číslo než 9:

- pokud je v horním trojúhelníku číslo 8, potom ve spodních dvou trojúhelnících musí být čísla 3 a 4,
- pokud je v horním trojúhelníku číslo 9, potom ve spodních dvou trojúhelnících musí být čísla 2 a 4.

V obou případech lze snadno doplnit ostatní čísla tak, že jsou splněny všechny požadavky ze zadání, viz obrázky. V horním trojúhelníku mohlo být vepsáno číslo 8 nebo 9.



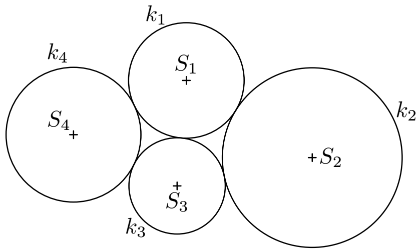


Návrh hodnocení. 2 body za vyjádření součtů čísel v trojúhelnících a šestiúhelnících; 1 bod za vyjádření čtveřice čísel v kruzích; 2 body za určení dvou možných čísel v horním trojúhelníku; 1 bod za doplnění obrázku a ověření.

Z9–II–3

Jsou dány kružnice k_1, k_2, k_3 a k_4 se středy po řadě S_1, S_2, S_3 a S_4. Kružnice k_1 a k_3 se vně dotýkají všech ostatních kružnic, poloměr kružnice k_1 je 5 cm, vzdálenost středů S_2 a S_4 je 24 cm a čtyřúhelník $S_1S_2S_3S_4$ je kosočtverec.

Určete poloměry kružnic k_2, k_3 a k_4.



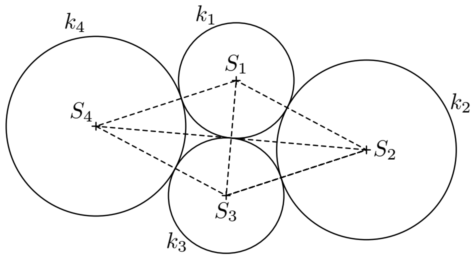
Poznámka: obrázek je pouze ilustrativní. (*E. Semerádová*)

Možné řešení. Na obrázku je znázorněno jediné možné uspořádání kružnic, které vyhovuje všem podmínkám ze zadání.

Protože se kružnice dotýkají, jsou délky stran čtyřúhelníku $S_1S_2S_3S_4$ rovny součtům poloměrů příslušných kružnic. Protože je tento čtyřúhelník kosočtvercem, jsou všechny jeho strany shodné. Tedy

$$s = r_1 + r_2 = r_2 + r_3 = r_3 + r_4 = r_4 + r_1,$$

kde r_1, r_2, r_3, r_4 jsou velikosti poloměrů odpovídajících kružnic a s je velikost strany kosočtverce. Odtud vyplývá, že protilehlé kružnice jsou navzájem shodné, tedy $r_1 = r_3$ a $r_2 = r_4$. Úhlopříčky v kosočtverci jsou na sebe kolmé a navzájem se půlí. Proto jsou trojúhelníky vymezené stranami a úhlopříčkami kosočtverce pravoúhlé a navzájem shodné.



Odvěsny mají podle zadání velikosti $r_1 = r_3 = 5\,\text{cm}$ a $\frac{1}{2}|S_2S_4| = 12\,\text{cm}$. Velikost přepony, tj. velikost strany kosočtverce, je podle Pythagorovy věty rovna

$$s = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13\,(\text{cm}).$$

Odtud vyplývá, že

$$r_2 = r_4 = 13 - 5 = 8\,(\text{cm}).$$

Poloměry kružnic k_1 a k_3 jsou 5 cm, poloměry kružnic k_2 a k_4 jsou 8 cm.

Návrh hodnocení. 3 body za zjištění a zdůvodnění, že $r_1 = r_3$ a $r_2 = r_4$; 2 body za určení strany kosočtverce; 1 bod za určení poloměrů r_2 a r_4.

Z9–II–4

Před každé z čísel v následujících dvou seznamech doplňte buď znaménko plus, nebo minus tak, aby hodnota takto zapsaných výrazů byla rovna nule:

a) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10,
b) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11.

U obou úloh uveďte alespoň jedno řešení, nebo zdůvodněte, že úloha řešení nemá.
(*M. Volfová*)

Možné řešení. Aby byl výsledek roven nule, musí být součet všech čísel se znaménkem plus stejný jako součet všech čísel se znaménkem minus. Odtud zejména plyne, že součet všech uvedených čísel musí být sudý.

V případě a) je celkový součet

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55.$$

Protože je tento součet lichý, úloha nemá řešení.

V případě b) je celkový součet

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 11 = 66.$$

Jak čísla se znaménkem plus, tak čísla se znaménkem minus proto musí mít součet 33. Jedno z možných řešení úlohy je např.

$$+1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 9 - 10 - 11.$$

Návrh hodnocení. 3 body za zjištění, že celkový součet musí být sudý; 1 bod za zjištění, že úloha a) nemá řešení; 2 body za nalezení jednoho řešení úlohy b).